

Berichte  
aus dem  
Institut für Meereskunde  
an der  
Christian-Albrechts-Universität Kiel

Nr. 44

DOI 10.3283/IFM-BER-44

DARSTELLUNG METEOROLOGISCHER FELDER  
MIT ENDLICHEM DEFINITIONSGBIET  
DURCH REIHEN ORTHOGONALER FUNKTIONEN

von

HEINZ FECHNER

Kopien dieser Arbeit können bezogen werden von:

Dr. Heinz Fechner  
Institut für Meereskunde  
Abt. Maritime Meteorologie

Düsternbrooker Weg 20  
D 2300 K i e l 1

## VORWORT

Seit vielen Jahren beschäftigt sich der Verfasser mit der Darstellung geophysikalischer Felder durch Reihen orthogonaler Funktionen.

Im Bericht Nr. 1 dieser Reihe wurden von ihm die orthogonalen Vektorfunktionen auf der Kugeloberfläche dargestellt; Bericht Nr. 5 befaßt sich mit der Darstellung des Geopotentials der 500 mb-Fläche der Nordhalbkugel durch Kugelflächenfunktionen und durch natürliche Orthogonalfunktionen.

In diesem Bericht wird die Darstellung durch Reihen orthogonaler Funktionen im allgemeinen dargestellt, Dabei treten drei Schwerpunkte hervor:

1. Die Gemeinsamkeiten der Darstellung von geophysikalischen Feldern durch Reihen orthogonaler Funktionen.
2. Die besonderen Eigenschaften der im einzelnen verwendeten Familien von Orthogonalfunktionen und wie man diese speziellen Eigenschaften anschaulich physikalisch plausibel machen kann.

Dabei soll der Leser

3. erkennen lernen, für welche Probleme die Darstellung durch Reihen orthogonaler Funktionen besonders gut geeignet ist.

Dieser Bericht soll Mathematikern helfen, mathematische Kriterien physikalisch oder geophysikalisch zu interpretieren; er soll den Geophysikern zeigen, wie sie ihre Probleme unter Verwendung von mathematischen Theorien lösen können. Der Bericht enthält viele mathematische Definitionen, Formeln und Ableitungen; auf komplizierte Beweise wurde jedoch verzichtet. Sie findet man in der angegebenen Literatur. Spitzfindige mathematische Formeln sind vermieden worden, u.a. dadurch, daß man die Voraussetzungen für die verwendeten Felder und Funktionen so

wählte, daß die Formeln so einfach und übersichtlich wie möglich blieben.

Alle wesentlichen Formeln sind vom Verfasser letztendlich in numerischen Rechnungen verwendet worden. Dementsprechend bleibt die reine Mathematik in dieser Arbeit ein Bindeglied zwischen den physikalisch formulierten Zielen und den numerischen Rechnungen. Reichliche Literaturangaben bei den einzelnen Kapiteln weisen auf Anwendungsbeispiele in der Meteorologie hin. Diese Berechnungen und Untersuchungen wurden von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert im Rahmen des Schwerpunkts: Energiehaushalt und Zirkulation der Atmosphäre; Arbeitsgruppe: Diagnose empirischer Felder der allgemeinen atmosphärischen Zirkulation (seit 1973), vorher: Empirische Erfassung und Analyse von großskaligen atmosphärischen Feldern. Die entsprechenden Forschungsarbeiten in der Abteilung Meteorologie des Instituts für Meereskunde in Kiel stehen unter der Leitung von Prof. Dr. Fr. Defant.

Herr Dipl.-Math. Holger Detlefsen, Kiel, hat dankenswerterweise das Manuskript durchgesehen.

## ZUSAMMENFASSUNG

Es werden beliebige Funktionen im Hilbertraum durch Reihen orthogonaler Funktionen dargestellt. Das Definitionsgebiet der Funktionen muß dabei ein endliches Maß besitzen. Die Orthogonalfunktionen sind die Eigenfunktionen eines bestimmten selbstadjungierten Eigenwertoperators mit nicht-negativen diskreten Eigenwerten. Der Operator wird aus einer Extremalaufgabe für die Eigenwerte abgeleitet. Die Eigenfunktionen sind nach der Größe der Eigenwerte geordnet. Je nach der Extremalbedingung erhält man zwei verschiedene Arten von Operatoren, Eigenfunktionen und Anordnungen der Eigenwerte: Ordnet man die Orthogonalfunktionen nach der Norm ihrer Ableitungen, so erhält man die mathematischen Orthogonalfunktionen, sie sind nach dem Grad ihrer Glätte geordnet. Hat man statische Kenntnisse der untersuchten Funktionen und ordnet nach der Norm des kleinsten statistischen Fehlers der Teilreihe, so besteht der entsprechende Operator im wesentlichen aus der Kovarianzfunktion des Meßwertfeldes, die zugehörigen Eigenfunktionen werden natürliche Orthogonalfunktionen genannt. Ihre Eigenwerte sind die Varianzen ihrer Orthogonalfunktion.

Die mathematischen Orthogonalfunktionen für eine geschlossene Kurve sind die Sinusfunktionen, für die Kugeloberfläche sind es die Kugelflächenfunktion bzw. ihre Ableitungen, letztere im Fall von horizontalen Vektorfeldern. Für eine Strecke sind es die Legendre'schen Polynome, und für eine ebene Rechteckfläche Produkte aus zwei Legendre'schen Polynomen. Bei der Anwendung der natürlichen Orthogonalfunktionen werden einerseits vertikale Funktionen betrachtet, bei denen die räumliche Koordinate der Luftdruck ist, dabei werden auch unterschiedliche physikalische Meßparameter in einer Orthogonalfunktion zusammengefaßt. Andererseits werden horizontale Funktionen betrachtet, die auf einer ganzen Hemisphäre definiert sind und bei denen die natürlichen Orthogonalfunktionen durch Kugelflächenfunktionskoeffizienten

dargestellt werden.

Für alle Typen von Orthogonalfunktionen werden Anwendungsbeispiele aus der Meteorologie gegeben, und es werden diejenigen Eigenschaften jeder einzelnen Funktion ausführlich dargestellt, die für ihre Anwendung in Meteorologie oder Geophysik von Bedeutung sein könnten. Im wesentlichen sind dies: die Datenreduktion, die Spektraldarstellung, die Herausarbeitung des Wesentlichen, die kontinuierliche Felddarstellung, die Vereinfachungen bei Differentiation und Integration, Darstellungen auf der Kugeloberfläche, objektive und optimale Klassifikation, Vereinfachung von statistischer Interpolation, Vorhersage und Analyse aus Punktwerten, sowie weitere Vorteile bei der Verwendung in numerischen Modellen.

## ABSTRACT

Arbitrary functions in Hilbert-space shall be represented by series of orthogonal functions. The definition area of the used functions must have a finite extension. The orthogonal functions are the eigenfunctions of one definite selfadjoint eigenvalue operator with non-negative discrete eigenvalues. The operator will be derived from an extremal problem for the eigenvalues. The eigenfunctions are arranged according to the magnitude of the eigenvalues. Decided by the given extremal problem two different kinds of operators, eigenfunctions and arrangements of the eigenvalues are obtained. If the orthogonal functions are arranged according to the norm of their derivatives, then mathematical orthogonal functions are arrived at. They are arranged according to the degree of smoothness.

If a statistical knowledge about the investigated functions is at hand, and if the functions are arranged by the norm of the smallest statistical error of the truncated series, then the operator essentially consists of the covariance-function of the measured field. The corresponding eigenfunctions are called empirical orthogonal functions, or modes. The eigenvalues are the variances of their own orthogonal functions.

The mathematical orthogonal functions for a closed curve are the sine functions. Those for the surface of the sphere are the surface spherical harmonics. If horizontal vector field are used we obtain the surface vector spherical harmonics. For a line segment the Legendre polynomials are obtained and for a plan rectangular surface a product of two Legendre polynomials as orthogonal eigenfunctions.

Considering empirical orthogonal functions, on one hand vertical functions were considered in which the space-coordinate is the air pressure. In this case different measured physical parameters are comprised into one empirical orthogonal function. On the other hand horizon-

tal empirical orthogonal functions were considered, which are defined on the total hemisphere and which were represented by series of empirical orthogonal functions which themselves are represented by the coefficients of spherical surface harmonics.

For all sorts of orthogonal functions examples of applications in Meteorology are presented. Those properties of each individue function is especially represented which appears to be of importance for an application in Meteorology and Geophysic. These properties are essentially the reduction of data, the spectral representation, the find out of peculiarities, the continuous representation of fields, which simplifies the differentiation and integration, the representation on the surface of a sphere, objective and optimal classification, simplification of statistical interpolation, prediction and analysis from discrete values, as well as further advantages by use in numerical models.

## INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. Einleitung	1
1.1. Darstellung von Feldern aus zwei Meß- werten durch zwei orthogonale Vektoren als Einführung in die Zielsetzung und Problematik des Themas	3
2. Definitionen und allgemeine mathematische Eigenschaften der orthogonalen Funktionen und ihrer Reihen im Hilbertraum	14
3. Eigenschaften spezieller mathematischer Ortho- gonalfunktionen	25
3.1. auf einer geschlossenen Kurve - die Kreisfunktionen -	25
3.2. auf der Kugeloberfläche - die Kugelflächenfunktionen -	29
3.3. auf der Kugeloberfläche - die orthogonalen Vektorfunktionen -	35
3.4. auf einer Strecke - die Legendre'schen Polynome -	41
3.5. auf einem ebenen Rechteck - das Produkt von zwei Legendre'schen Polynomen -	46
4. Die natürlichen Orthogonalfunktionen und ihre Eigenschaften	51
5. Spezielle Anwendungen	63
5.1. Die Anwendung von Fourierreihen in der Meteorologie	63
5.2. Die Darstellung meteorologischer Skalarfelder durch Kugelflächen- funktionen	63
5.3. Die Darstellung von horizontalen Vektorfeldern auf der Kugelober- fläche durch orthogonale Vektor- funktionen	65



	Seite
5.4. Die Anwendung Legendre'scher Polynome zur Darstellung vertikaler Temperaturverteilungen	66
5.5. Die Analyse des Luftdrucks und anderer Größen in einem rechteckigen Gebiet mit Hilfe von doppelten Legendre'schen Polynomen	67
5.6. Natürliche Orthogonalfunktionen zur Darstellung der horizontalen Verteilung des Geopotentials auf der Nordhalbkugel	68
5.7. Vertikale natürliche Orthogonalfunktionen an einem festen geographischen Ort	70
6. Spezielle Eigenschaften der Reihendarstellung durch orthogonale Funktionen	72
6.1. Datenreduktion	72
6.2. Transformation in die Spektraldarstellung	73
6.3. Abgestufte vereinfachte Darstellung der Datenfelder	73
6.4. Kontinuierliche Darstellung von Feldern	74
6.5. Feldanalyse aus Punktwerten	75
6.6. Kontinuierliche Darstellung von Feldern auf der Kugeloberfläche	77
6.7. Vereinfachung der Differentiation und Integration	78
6.8. Objektive Klassifikation gewisser Typen von Datenfeldern	79
6.9. Statistische Interpolation, Extrapolation und Vorhersage	81
6.10. Die Verwendung orthogonaler Reihendarstellung in numerischen Modellen	83
7. Zusammenfassung der Ergebnisse	84
Tabelle der verwendeten Symbole	91
Literaturverzeichnis	96

## 1. EINLEITUNG

Die Meteorologie, wie auch die übrigen Zweige der Geophysik, befassen sich mit physikalischen Größen, auch Variable oder Felder genannt, die als kontinuierliche Funktionen von Raum und Zeit auftreten, wie z.B. die Temperatur- oder die Druckverteilung. Sollen diese Größen - hier soll als Beispiel die Temperatur genommen werden - numerisch, also durch Zahlenwerte, dargestellt werden, so gibt es für die Art der Darstellung zwei prinzipiell unterschiedliche Möglichkeiten:

1. Man gibt die Temperaturwerte für bestimmte räumliche und zeitliche Punkte an, das ist die sogenannte Gitterpunktdarstellung, oder
2. Die Temperaturwerte werden dargestellt durch eine Summe von fest vorgegebenen Funktionen von Raum und Zeit, wobei die einzelnen Funktionen mit variablen Koeffizienten gewichtet werden. Ein Feld wird dann bei bekannten Funktionen durch den entsprechenden Satz der Koeffizienten dargestellt, das ist die sogenannte spektrale Darstellung.

Bei der Gitterpunktdarstellung liegen die Werte nur an diesen Gitterpunkten, jedoch nicht an den dazwischen liegenden Punkten vor.

Bei der spektralen Darstellung läßt sich die physikalische Größe nur angeben, falls man die für die Reihendarstellung verwendeten Funktionen kennt, dann kann man die physikalische Größe (z.B. die Temperatur) für jeden Ort bzw. jede Zeit, für die die Funktionen erklärt sind, ausrechnen. Bei Verwendung von kontinuierlichen Funktionen ist die spektrale Darstellung kontinuierlich. Daraus folgt dann, daß es in diesem Fall bei Integration und vor allem bei der Differentiation prinzipiell keine Schwierigkeiten gibt.

Anders bei der Gitterpunkt:arstellung. Dort sind die Operationen der Integration, der Mittelbildung und vor allem der Differentiation zunächst überhaupt nicht definiert. Hier müssen erst zusätzliche Annahmen gemacht werden und es können Schwierigkeiten prinzipieller Art auftreten, speziell diejenige, welche von den verschiedenen möglichen, aber notwendigen, Annahmen die richtige sei.

Die nachfolgende Untersuchung befaßt sich mit der zweiten Art der Darstellung von geophysikalischen Größen: mit der spektralen Darstellung. Dabei wird das Definitionsgebiet, auf dem diese geophysikalische Größe erklärt ist, als endlich vorausgesetzt. Also ein endlicher Zeitabschnitt, wobei ein zyklisch sich wiederholender Vorgang wie ein Tages- oder Jahresgang als endlich gilt, oder bei räumlichen Gebieten werden Punkte, Strecken, geschlossene Kurven, Rechtecke und die Kugeloberfläche als Definitionsgebiet für die darzustellende geophysikalische Größe im einzelnen untersucht. Es ist klar, daß alle diese Gebiete endlich sind. Die nach einer oder beiden Seiten unendliche Gerade, die ebene Fläche und der dreidimensionale Raum sind als Definitionsgebiete für geophysikalische Variable nicht zugelassen. Streng genommen kann so etwas bei den räumlichen Definitionsgebieten in der Meteorologie auch nicht vorkommen.

Zur Einführung soll das betrachtete Feld nur aus zwei Meßstellen bestehen, d.h. z.B., die Temperatur soll an zwei verschiedenen Orten gemessen worden sein.

1.1. Darstellung von Feldern aus zwei Meßwerten durch zwei orthogonale Vektoren als Einführung in die Zielsetzung und Problematik des Themas

$f(1), f(2)$  seien physikalische Meßwerte an den Stellen 1 und 2, zum Beispiel die Temperaturen an zwei verschiedenen Stationen zur gleichen Zeit. Die Menge der möglichen Meßwerte, also der physikalisch sinnvollen Temperaturwerte werde mit  $\mathcal{M}$  bezeichnet:

$$f(1), f(2) \in \mathcal{M}. \quad (1)$$

Dann läßt sich der Zustand zu einem festen Termin durch den Vektor

$$f =_{\text{Def}} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \end{pmatrix} \quad (2)$$

eindeutig beschreiben. Die Menge aller möglichen Vektoren werde mit  $\mathcal{H}_2$  bezeichnet:

$$f \in \mathcal{H}_2.$$

Um eine Verwechslung mit anderen Vektoren auszuschließen, werden die Elemente von  $\mathcal{H}_2$  auch häufig Felder genannt. Sind  $f$  und  $g$  zwei Felder, so soll auch ihre Summe (als Summe ihrer Komponenten) wieder ein Feld sein. Werden die Komponenten eines Feldes mit einer beliebigen Zahl  $c$  multipliziert, so soll das so entstandene Feld  $cf$  auch zu  $\mathcal{H}_2$  gehören. Damit ist  $\mathcal{H}_2$  ein Vektorraum geworden.

Unser Ziel ist es nun, den zweidimensionalen Vektor  $f$  durch eine einzige Zahl  $c_1$  darzustellen. Dadurch wird die Datenmenge reduziert, und man erhält ein übersichtlicheres Bild über die zeitliche Änderung von  $f$ . Bei dieser Datenreduktion soll möglichst wenig Information verloren gehen.

Um diesem Problem näher zu kommen, betrachtet man das Nährungsfeld

$$f_1 = c_1 g_1 \quad (3)$$

für  $f$ .

Dabei soll  $c_1 \in \mathcal{L}$  von der Zeit abhängen, während der Vektor  $g_1 \in \mathcal{H}_2$  fest vorgegeben, also zeitunabhängig sein soll.  $\mathcal{L}$  soll im allgemeinsten Fall die Menge der komplexen Zahlen darstellen; hier genügt es, sich auf reelle Zahlen zu beschränken. Damit man feststellen kann, ob das Feld  $f_1$  sich von dem wahren Feld  $f$  möglichst wenig unterscheidet, muß man die Güte der Übereinstimmung von  $f$  und  $f_1$  messen können. Als Gütemaß wird die  $1/\sqrt{2}$ -fache Länge des Differenzvektors

$$f - f_1 = \begin{pmatrix} f(1) - f_1(1) \\ f(2) - f_1(2) \end{pmatrix} \quad (4)$$

verwendet. Das Gütemaß ist

$$v = \sqrt{\frac{1}{2} \{ |f(1) - f_1(1)|^2 + |f(2) - f_1(2)|^2 \}}; \quad (5)$$

je kleiner  $v$ , desto besser die Übereinstimmung. Für den Abstand  $v$  der Vektoren  $f$  und  $f_1$  schreibt man auch  $||f - f_1||$  oder  $\sqrt{(f-f_1, f-f_1)}$ .  $||f||$  wird auch Norm von  $f$  genannt.

Dabei ist  $(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{x=1}^2 f(x) g(x) \quad (6)$

das innere Produkt von  $f, g \in \mathcal{H}_2$ . Diese Definition unterscheidet sich von der üblichen Definition des inneren Produkts um den konstanten Faktor  $\frac{1}{2}$ . Für das Gütemaß ist dies ohne Bedeutung. Doch steht jetzt rechts in der Formel (6) statt der Summe, der Mittelwert über das Produkt  $f(x) g(x)$ .

Der Vorteil dieser Definition liegt darin, daß der zeitabhängige Koeffizient  $c_1$  dadurch gleich dem Mittelwert aus  $f(1)$  und  $f(2)$  wird (vergleiche dazu Formel (17)). Wir bemühen uns also,  $c_1$  so zu bestimmen, daß

$$v^2 = ||f - f_1||^2 = (f - f_1, f - f_1) = ||f||^2 - 2(f, f_1) + ||f_1||^2$$

ein Minimum wird. Setzt man  $f_1 = c_1 g_1$  ein, so muß

$$v^2 = ||f||^2 - 2 c_1 (f, g_1) + c_1^2 ||g_1||^2$$

ein Minimum werden oder

$$\frac{\partial v^2}{\partial c_1} = -2(f, g_1) + 2 c_1 ||g_1||^2 = 0.$$

Daraus folgt

$$c_1 = \frac{(f, g_1)}{||g_1||^2}. \quad (8)$$

Die einzige notwendige Bedingung für  $g_1$  ist  $g_1 \neq 0$ .  
Man erkennt, daß die Formel sich vereinfacht, wenn man

$$||g_1|| = 1 \quad (9)$$

setzt. Damit erhält man

$$c_1 = (f, g_1) = \frac{1}{2} \sum_{x=1}^2 f(x) g_1(x) \quad (10)$$

$$\text{mit } \frac{1}{2} \sum_{x=1}^2 g_1^2(x) = 1,$$

und man hat  $f$  durch  $f_1 = c_1 g_1$  anzunähern. Dabei macht man den Fehler:

$$v = \pm \sqrt{||f||^2 - (f, g_1)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{x=1}^2 (f(x))^2 \{1 - (g_1(x))^2\}}.$$

Läßt man einen zweiten zeitabhängigen Koeffizienten  $c_2 \in \mathcal{K}$  zu, so kann man  $f$  exakt darstellen durch

$$f = c_1 g_1 + c_2 g_2 \quad (11)$$

mit  $g_2 \in \mathfrak{H}_2$  und  $g_2$  zeitunabhängig, wenn  $g_2$  so gewählt wird, daß das innere Produkt

$$(g_1, g_2) = 0 \quad (12)$$

verschwindet.

Der Vektor  $g_2$  steht dann senkrecht auf  $g_1$ , d.h.  $g_2$  ist orthogonal zu  $g_1$ .

Aus Vereinfachungsgründen setzt man wieder

$$||g_2|| = 1.$$

Außerdem muß nach dem gleichen Schema wie oben

$$c_2 = (f, g_2) \quad (13)$$

gewählt werden.

$g_2$  ist bis auf den Faktor  $\pm 1$  eindeutig bestimmt.

Aber wie wählt man  $g_1$ ?

Hier müssen nun zwei Fälle unterschieden werden.

Hat man keine statistischen Kenntnisse, also keine

Erfahrung, über das Verhalten der Meßwertfelder  $f$ ,

so wird man auf Grund der Austauschvorgänge zwischen

den beiden Meßorten annehmen können, daß die Differenz

$f(1) - f(2)$  der beiden Meßwerte nicht zu groß wird.

Deshalb erscheint es in diesem Fall sinnvoll zu sein,

den Vektor  $g_1$  so zu bestimmen, daß für ihn  $|g_1(1) - g_2(2)|$

ein Minimum wird. Es ist klar, daß ein derartiges  $g_1$

zwei gleiche Komponenten hat  $g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Für  $g_2$  erhält man

dann einen Vektor mit entgegengesetzten Komponenten

$g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  oder  $g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . (Da der letztere Vektor von

dem ersteren nicht wesentlich verschieden ist, soll

er nicht mehr betrachtet werden). Dieses Ergebnis kann

man aber auch formal aus der oben angegebenen Minimums-

bedingung ableiten. Dies soll als Grundlage für weitere

Verallgemeinerungen dienen. Aus diesem Grunde soll dies

hier etwas ausführlicher behandelt werden. Durch eine

$2 \times 2$ -Matrix  $A = (a_{xy})$  läßt sich ein Vektor  $f \in \mathcal{H}_2$  linear

in einen anderen Vektor  $h \in \mathcal{H}_2$  abbilden

$$A \cdot f = h \qquad A \in \mathcal{M}_2 \qquad (13)$$

Die Menge aller zweidimensionalen Matrizen, die Elemente

aus  $\mathcal{H}_2$  in Elemente aus  $\mathcal{H}_2$  linear abbildet, werde dabei mit  $\mathcal{M}_2$  bezeichnet.

Die orthogonalen Vektoren  $g_1, g_2 \in \mathcal{H}_2$  sollen jetzt die

Eigenvektoren einer speziellen Matrix  $A \in \mathcal{M}_2$  sein

$$A \cdot g_k = w_k^2 g_k, \qquad k = 1, 2. \qquad (14)$$

Dabei sei der Eigenwert  $w_k^2$  eine nicht negative reelle Zahl,  $w_1^2, w_2^2 \in \mathcal{R}$ . Mit  $\mathcal{R}$  wird stets die Menge der nicht negativen reellen Zahlen bezeichnet.

Unsere Eigenvektoren  $g_k$  können dann nach der Größe der

Eigenwerte  $w_k^2$  geordnet werden. Dafür ist wesentlich,

daß die  $w_k^2$  reell sind, es ist jedoch zweckmäßig, daß sie nicht negativ sind. Um letztes anzudeuten, setzt

man  $w_k^2$  statt  $w_k$ .

Für die Matrix A werde Symmetrie vorausgesetzt, also  $a_{xy} = a_{yx}$ . Dadurch ist sichergestellt, daß die Eigenwerte reell sind.

Zusätzlich soll A so gewählt werden, daß die Orthogonalvektoren nach der Größe der Differenz ihrer Komponenten (Meßwerte) geordnet werden können. Das Quadrat dieser Differenz soll gerade der Eigenwert  $w_k^2$  sein:

$$(g_k(2) - g_k(1))^2 = w_k^2. \quad (15)$$

Multipliziert man in Formel (14) die rechte und linke Seite skalar mit  $g_k$ , so erhält man wegen Formel (9) rechts  $w_k^2$  und wegen Formel (15) schließlich

$$(Ag_k, g_k) = (g_k(1) - g_k(2))^2. \quad (16)$$

Dies ergibt, ausgerechnet unter Verwendung von Formel (6)

$$\frac{1}{2} a_{11} g_k^2(1) + a_{12} g_k(1) g_k(2) + \frac{1}{2} a_{22} g_k^2(2) = g_k^2(1) + g_k^2(2) - 2g_k(1)g_k(2)$$

oder

$$\left(\frac{1}{2} a_{11} - 1\right) g_k^2(1) + 2\left(1 + \frac{1}{2} a_{12}\right) g_k(1) g_k(2) + \left(\frac{1}{2} a_{22} - 1\right) g_k^2(2) = 0.$$

Eine Lösung ist  $a_{11} = a_{22} = 2$ ,  $a_{12} = a_{21} = -2$ , also

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dies A ist symmetrisch und hat nicht negative Eigenwerte, und es ist auch die einzige Lösung mit diesen Eigenschaften. Die Eigenwerte sind

$$w_1^2 = 0 \quad \text{und} \quad w_2^2 = 4,$$

sowie die erwarteten Eigenvektoren

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sind jetzt  $f(1)$  und  $f(2)$  wieder die Meßwerte an den Stellen 1 und 2, so erhält man für den 1., also den wichtigsten Koeffizienten  $c_1$  nach Formel (10)



$$c_1 = \frac{1}{2} (f(1) + f(2)), \quad (17)$$

also gerade den Mittelwert der Meßwerte.

Der zweite Koeffizient

$$c_2 = \frac{1}{2} (f(1) - f(2))$$

stellt ein Maß für die Abweichung beider Meßwerte von dem Mittelwert dar. Den exakten Wert des Meßwertfeldes  $f$  erhält man durch die Summation der Terme, die aus dem Produkt des Koeffizienten  $c_k$  mit dem Eigenvektor  $g_k$  entstehen, vergleiche dazu Formel (11)!

Jetzt werde der andere Fall betrachtet, bei dem man statistische Kenntnisse über das Feld  $f$  besitzt. Der zeitliche Mittelwert einer zeitabhängigen Größe  $c(t)$  werde mit

$$\bar{c} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T c(t) \quad (18)$$

bezeichnet. Darin ist  $T$  die Anzahl der Termine, auf der die Statistik beruht.

Auch in diesem Fall sollen die orthogonalen Funktionen  $g_k$  Eigenvektoren einer speziellen symmetrischen Matrix  $A \in \mathbb{R}_2$  sein:

$$A \cdot g_k = w_k^2 g_k \quad (19)$$

mit den nicht negativen Eigenwerten  $w_k^2$ . Stellt man den orts- und zeitabhängigen Meßwert  $f(x)$  durch die Summe von zwei Faktoren  $c_k$  und  $g_k(x)$  dar, wobei  $c_k$  nur von der Zeit und  $g_k(x)$  vom Ort, aber nicht von der Zeit abhängen soll:

$$f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) \text{ für } x = 1, 2, \quad (20)$$

so sollen  $c_1$  und  $g_1(x)$  so bestimmt werden, daß das Quadrat des zweiten Terms  $c_2 g_2(x) = f(x) - c_1 g_1(x)$ , (21) also des Fehlers bei der Approximation von  $f(x)$  durch den ersten Term ein Minimum wird:

$$\overline{c_2^2} ||g_2||^2 = \frac{1}{2} \int_{x=1}^2 (f(x) - c_1 g_1(x))^2 = \text{Minimum}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \overline{c_2^2} ||g_2||^2 &= ||f||^2 + \overline{c_1^2} ||g_1||^2 - 2 \overline{c_1(f, g_1)} = \\ &= \text{Minimum}, \end{aligned} \quad (24)$$

Eine notwendige Bedingung für das Minimum ist, daß die partiellen Ableitungen nach  $c_1$  und  $g_1$  verschwinden:

$$\frac{\partial}{\partial c_1} \overline{c_2^2} ||g_2||^2 = 2 c_1 ||g_1||^2 - 2(f, g_1) = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial g_1} \overline{c_2^2} ||g_2||^2 = 2 \overline{c_1^2} g_1 - 2 \overline{c_1} f = 0. \quad (26)$$

Aus der ersten Beziehung folgt

$$c_1 = \frac{(f, g_1)}{||g_1||^2} \quad (27)$$

und aus der zweiten

$$\overline{c_1} f = \overline{c_1^2} g_1. \quad (28)$$

Setzt man hier links den Wert für  $c_1$  aus (27) ein, so erhält man

$$\overline{f(f, g_1)} = w_1^2 g_1 \quad \text{mit } w_1^2 = \overline{c_1^2} ||g_1||^2; \quad (29)$$

dabei ist  $w_1^2$  eine von Zeit und Ort unabhängige positive Zahl.

Multipliziert man (20) mit  $g_1(x)$  und mittelt über  $x$ , so folgt

$$(f, g_1) = c_1 ||g_1||^2 + c_2(g_2, g_1);$$

unter Verwendung von (27) folgt daraus

$$c_2(g_2, g_1) = 0$$

oder, da dies für alle  $c_2$  (zu allen Zeiten gelten soll),

$$(g_2, g_1) = 0, \quad (30)$$

also ist  $g_2$  orthogonal zu  $g_1$ .

Multipliziert man (20) mit  $c_1$  und mittelt über die Zeit, so folgt

$$\overline{c_1 f(x)} = \overline{c_1^2} g_1(x) + c_1 c_2 g_2(x),$$

unter Verwendung von (28) folgt daraus ganz entsprechend

$$\overline{c_2 c_1} = 0. \quad (31)$$

Multipliziert man (20) mit  $g_2(x)$  und mittelt über  $x$ , so erhält man unter Verwendung der Orthogonalitätsrelation (30) für  $g_1$  und  $g_2$

$$(f, g_2) = c_2 ||g_2||^2$$

oder

$$c_2 = \frac{(f, g_2)}{||g_2||^2}. \quad (32)$$

Ganz entsprechend erhält man durch Multiplikation von (20) mit  $c_2$ , Mittlung über die Zeit und Verwendung von (31)

$$\overline{f c_2} = \overline{c_2^2} g_2.$$

Bildet man jetzt den in (29) links stehenden Ausdruck mit  $g_2$  statt  $g_1$ , so folgt ganz analog zu (29)

$$\overline{f(f, g_2)} = w_2^2 g_2 \quad \text{mit } w_2^2 = \overline{c_2^2} ||g_2||^2.$$

$w_2^2$  soll aber nach (23) ein Minimum sein, also

$$w_1^2 \geq w_2^2.$$

Allgemein haben wir erhalten

$$\overline{f(f, g_k)} = w_k^2 g_k \quad (33)$$

$$\text{mit } w_k^2 = \overline{c_k^2} \|g_k\|^2, \quad w_k^2 \geq w_{k+1}^2 \quad (34).$$

Dies ist nun die gesuchte Eigenwertgleichung (19) mit der Eigenwertmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \overline{f(1)^2} & \overline{f(1) \cdot f(2)} \\ \overline{f(2) \cdot f(1)} & \overline{f(2)^2} \end{pmatrix} \quad (34a)$$

$$\text{oder } A = (a_{xy}) \text{ mit } a_{11} = \overline{f(1)^2}; \quad a_{22} = \overline{f(2)^2}$$

$$\text{und } a_{12} = a_{21} = \overline{f(1) f(2)} \quad (35).$$

Die Matrix A besteht aus den zeitlichen Mittelwerten aller Produkte der Meßwerte an den Meßorten. Da man für die Berechnung dieser durch (19) definierten Orthogonalvektoren, die Meßwerte  $f(x)$ , also Information aus der Natur benötigt, werden sie *natürliche* Orthogonalvektoren genannt. Die durch (34a) definierte Matrix A ist auf eine spezielle Art und Weise entstanden, es ist eine symmetrische Matrix, die nicht-negative Eigenwerte hat.

Für die Eigenwerte erhält man

$$\begin{aligned} w_1^2 &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4 a_{12}^2} \\ w_2^2 &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4 a_{12}^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

In die Eigenvektoren geht nur der Ausdruck

$$W = \frac{a_{11} - a_{22}}{w_1^2 - w_2^2} = \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4 a_{12}^2}} \quad (37)$$

ein.

$$g_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \sqrt{1+W} \\ \varepsilon_2 \sqrt{1-W} \end{pmatrix} \quad g_2 = \begin{pmatrix} -\varepsilon_2 \sqrt{1-W} \\ \varepsilon_2 \sqrt{1+W} \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$\text{mit } \varepsilon_1 = \begin{cases} -1 & \text{für } a_{12} > 0 \text{ und } W \leq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{und } \varepsilon_2 = \begin{cases} -1 & \text{für } a_{12} > 0 \text{ und } W > 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch diese Wahl von  $\varepsilon_2$  erreicht man, daß der zeitliche Mittelwert der Koeffizienten  $c_1, c_2$  nicht negativ wird:

$$\bar{c}_i \geq 0.$$

$$\text{Bestimmt man } \theta \text{ aus } \operatorname{tg} \theta = \frac{w_1^2 - w_2^2 - (a_{11} - a_{22}) + 2a_{12}}{w_1^2 - w_2^2 - (a_{11} - a_{22}) - 2a_{12}},$$

so erhält man die Eigenvektoren aus

$$g_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \\ \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}; \quad g_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \\ \sqrt{2} \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}.$$

Der Winkel  $\theta$  gibt an, wie stark die Eigenvektoren gegenüber den mathematischen Orthogonalvektoren verdreht sind.

Nimmt man an, daß die zeitlichen Mittelwerte von  $f$  verschwinden  $\bar{f}(1) = \bar{f}(2) = 0$ , so wird der Korrelationskoeffizient  $r$  durch

$$r = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}$$

dargestellt. Verwendet man diese Beziehung, so erhält man für den Eigenwert

$$w_1^2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 + 4 a_{11} a_{22} (r^2 - 1)},$$

entsprechend für  $w_2^2$ .

Für W ergibt sich

$$W = \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4 a_{11} a_{22} r^2}},$$

darin sind  $a_{11}$  und  $a_{22}$  die Varianzen der Meßwerte an den Stellen  $x=1$  und  $x=2$ .

Das sind die gleichen Werte wie die Quadrate der Streuungen. Angenommen, die Streuungen an beiden Meßorten wären gleich, dann erhielt man für die Eigenwerte

$$\begin{aligned} w_1^2 &= \frac{1}{2} \{a_{11} + 2 \sqrt{a_{11} a_{22}} |r| + a_{22}\} \\ w_2^2 &= \frac{1}{2} \{a_{11} - 2 \sqrt{a_{11} a_{22}} |r| + a_{22}\}, \end{aligned} \quad (38)$$

Man erkennt, daß die Eigenwerte den Varianzen  $a_{xx}$  der Meßwerte proportional sind und ihr Verhältnis von dem Absolutbetrag des Korrelationskoeffizienten abhängt: Beim Korrelationskoeffizienten  $r = \pm 1$  verschwindet der zweite Eigenwert  $w_2^2$ . Der erste Eigenwert ist dann gleich der Gesamtvarianz  $w_1^2 = a_{11} + a_{22}$ .

Denn unabhängig von dem Korrelationskoeffizienten ist die Summe der Eigenwerte gleich der Summe der Varianzen, also gleich der Gesamtvarianz. Dies gilt auch, wenn die Varianzen der Meßwerte unterschiedlich groß sind.

Die Differenz der Eigenwerte ist:

$$w_1^2 - w_2^2 = \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4 a_{11} a_{22} r^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a_{22}}} - \frac{\sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a_{11}}}\right)^2 + 4 r^2} \sqrt{a_{11} a_{22}}, \quad (39)$$

dabei sind  $\sqrt{a_{11}}$  und  $\sqrt{a_{22}}$  die Streuungen der Meßwerte. Die Differenz der Eigenwerte ist also dem Produkt der Streuungen proportional; sie wächst außerdem mit wachsendem Absolutbetrag des Korrelationskoeffizienten und mit wachsendem Unterschied der Quotienten aus den Streuungen.

Haben wir eine Funktion  $f(x)$  mit dem Zeitmittel Null nach (20) in zwei Terme ihrer natürlichen Orthogonalvektoren zerlegt, so stellen die Wurzeln  $\pm w_1$ ,  $\pm w_2$  aus den Eigenwerten gerade die Streuungen der jeweiligen Terme dar.

Das folgt z.B. für den ersten Term aus Formel (29). Die Korrelation zwischen den Koeffizienten  $c_1$  und  $c_2$  verschwindet gemäß Formel (31) und damit auch die Korrelation aus den beiden Termen. Dies sind die wesentlichen Eigenschaften einer Zerlegung nach natürlichen Orthogonalvektoren.

## 2. DEFINITIONEN UND ALLGEMEINE MATHEMATISCHE EIGENSCHAFTEN DER ORTHOGONALEN FUNKTIONEN UND IHRER REIHEN IM HILBERTRAUM

Im ersten Abschnitt hatten wir Meßreihen von je 2 Meßwerten betrachtet, Jetzt soll eine endliche Anzahl  $K$  von Meßwerten, pro Termin angenommen werden:

$f(1), \dots, f(K)$     seien Meßwerte an den Stellen  
 $x = 1, \dots, K$     zu dem Termin  $t$ .

Mit  $\mathcal{H}_K$  werde wieder die Menge der möglichen Meßwerte und mit  $\mathcal{H}_K$  der entsprechende  $K$ -dimensionale Vektorraum aller Vektoren  $f$  mit den Komponenten  $f(x)$   $x = 1, \dots, K$  bezeichnet.

Unser Ziel besteht nun darin, jeden Vektor  $f \in \mathcal{H}_K$  durch möglichst wenig Zahlen  $c_1, \dots, c_k$  mit  $k = 1, \dots, K-1$  darzustellen. Wesentlich ist dabei, daß sich beim Übergang von  $k-1$  nach  $k$  die eventuell bereits berechneten Koeffizienten  $c_1, \dots, c_{k-1}$  nicht ändern sollen. Bei dieser Datenreduktion soll möglichst wenig Information über den Meßwertvektor

$$f = \begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(K) \end{pmatrix}$$

verlorengelassen. Dieses Ziel soll jetzt noch einmal auf eine etwas exaktere Art und Weise formuliert werden:

Analog zu Formel (3) definiert man das  $n$ -te Näherungsfeld  $1 \leq n \leq K-1$  durch

$$f_n = \sum_{k=1}^n c_k g_k. \quad (40)$$

Dabei sollen die  $c_k \in \mathcal{L}$  nicht vom Ort, jedoch von der Zeit abhängige Zahlen sein, während die Vektoren  $g_k \in \mathcal{H}_K$  fest vorgegeben und zeitunabhängig sein sollen.

Damit man feststellen kann, wie stark sich das Feld  $f_n$  von dem gemessenen Feld  $f$  unterscheidet, wird die folgende nicht negative Zahl  $v_n$  als Gütemaß der Übereinstimmung definiert:

$$v_n = \sqrt{(f-f_n, f-f_n)} = ||f-f_n||, \quad (41)$$

darin wird der Ausdruck  $(f,g)$  für  $f, g \in \mathcal{H}_K$  durch

$$(f,g) = \frac{1}{K} \sum_{x=1}^K f(x) g(x) \quad (42)$$

definiert und inneres Produkt der Felder  $f$  und  $g$  genannt. Die Formeln (41) und (42) sind die Verallgemeinerungen der Formeln (5) und (6).

Das Ziel besteht nun darin, die zeitabhängigen Koeffizienten  $c_k \in \mathcal{L}$ ,  $k=1, \dots, K-1$  so zu bestimmen, daß der Fehler des  $n$ -ten Näherungsfeldes ein Minimum wird:

$$v_n = ||f-f_n|| = \text{Minimum für } n=1, \dots, K-1. \quad (43)$$

Also

$$\frac{\partial v_n}{\partial c_n} = 0 \text{ und } v_n \leq v_{n+1} \text{ für } n=1, \dots, K-1. \quad (44)$$

Als Lösung dieser Extremalaufgabe erhält man durch Verallgemeinerung des Rechengangs der zu den Formeln (8), (11), (12) und (13) führte:

$$c_k = \frac{(f, g_k)}{||g_k||^2} \quad k = 1, \dots, K. \quad (45)$$

Dabei ist  $c_K$  dadurch festgelegt, daß das  $K$ -te Näherungsfeld  $h_K$  gleich dem darzustellenden Meßwertfeld sein soll



$$f = f_K = \sum_{k=1}^K c_k g_k. \quad (46)$$

Außerdem folgt, daß die  $g_k$  paarweise orthogonal sein müssen

$$(g_k, g_m) = 0 \quad \text{für } m \neq k \quad (47)$$

und nicht verschwinden dürfen. Die  $g_k$  werden deshalb Orthogonalvektoren genannt. Aus Formel (45) erkennt man, daß sie nicht verschwinden dürfen. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, sollen sie auf eins normiert sein:

$$(g_k, g_k) = \|g_k\|^2 = 1. \quad (48)$$

Bevor auf die Frage eingegangen werden soll, wie man die Orthogonalvektoren  $g_k$  erhält, soll zunächst eine weitere Verallgemeinerung dadurch erfolgen, daß wir für unseren Vektorraum  $\mathcal{H}_K$  unendlich viele Dimensionen ( $K = \infty$ ) annehmen. Das bedeutet: Die Meßwerte  $f(x)$  sind nicht an diskreten Stellen  $x = 1, 2, 3, \dots$  gegeben, sondern auf einer kontinuierlichen Punktmenge  $\mathcal{D}$ . Dadurch erhält man statt der Vektoren  $f$ , die Funktionen  $f$  mit dem Wertebereich  $\mathcal{M}$  und dem Definitionsbereich  $\mathcal{D}$

$$f(x) \in \mathcal{M} \quad \text{für } x \in \mathcal{D}.$$

Statt  $\mathcal{H}_\infty$  schreibt man einfach  $\mathcal{H}$ , denn  $\mathcal{H}$  wird auch Hilbertraum genannt, falls ein inneres Produkt  $(f, g)$  definiert ist, das folgende Eigenschaften hat:

1.  $(f, g)$  ist eine komplexe Zahl für alle  $f, g \in \mathcal{H}$   
also  $(f, g) \in \mathcal{L}$
2.  $(cf, g+h) = c(f, g) + c(f, h)$   
für alle  $f, g, h \in \mathcal{H}$  und alle  $c \in \mathcal{L}$
3.  $(g, f) = (f, g)^*$ .

Dabei soll der Stern den Übergang zum konjugiert komplexen Wert andeuten. Aus (2.) und (3.) folgt

$$2a. (f, cg) = c^*(f, g) \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{H} \text{ und } c \in \mathcal{L}.$$

Eine ganz genaue und ausführliche Darstellung über Hilberträume findet man bei SMIRNOW (1962 b). Eine Verallgemeinerung der Definition des inneren Produkts für  $\mathcal{H}_K$ , Formel (42), das die Bedingungen 1, 2 und 3 erfüllt, ist

$$(f, g) = \frac{1}{m(\mathcal{G})} \int_{\mathcal{G}} f(x) g^*(x) dx \quad (49)$$

mit  $m(\mathcal{G}) = \int_{\mathcal{G}} dx.$

Im allgemeinsten Fall ist dabei der Lebesgue-Stieltje Integralbegriff zu verwenden. Seine genaue Definition findet man bei SMIRNOW (1962 a).

Die Eigenschaft 3 bewirkt, daß das Normquadrat  $||f||^2 = (f, f)$  auch für beliebige komplexwertige Funktionen  $f \in \mathcal{H}$  reell und nicht negativ wird. Sie ist für reelle Werte ohne Bedeutung. Für beliebige Funktionen  $h(x)$ , die in dem Definitionsbereich  $\mathcal{G}$  erklärt sind, stellt der Ausdruck

$$\frac{1}{m(\mathcal{G})} \int_{\mathcal{G}} h(x) dx$$

den räumlichen Mittelwert der  $h(x)$  über alle  $x \in \mathcal{G}$  dar.

Für die Elemente  $f$  eines Hilbertraums  $\mathcal{H}$  wird lediglich noch verlangt, daß die Norm von  $f$  einen endlichen Wert hat. Das bedeutet unter Verwendung der Definition (49) für das innere Produkt, daß das Normquadrat von  $f$  existiert und endlich bleibt:

$$||f||^2 = \frac{1}{m(\mathcal{G})} \int_{\mathcal{G}} |f(x)|^2 dx < + \infty. \quad (50)$$

Der Ausdruck rechts stellt jedoch gerade den räumlichen Mittelwert über die Quadrate der Funktionswerte dar.

Derartige Quadrate von physikalischen Meßwerten, stellen fast immer ein Maß für die Energie dar. Formel (50)

besagt daher nichts anderes als "*die Gesamtenergie unseres Systems ist endlich*"; dies ist gewiß keine Einschränkung für  $\mathcal{H}$ , sondern dies muß stets erfüllt sein, wenn die Werte  $f(x) \in \mathcal{H}$  physikalisch sinnvoll sein sollen.

Die für einen Hilbertraum erforderliche Vollständigkeit ergibt sich daraus, daß  $\mathcal{H}$  aus *allen* Funktionen besteht, die die oben angegebenen Eigenschaften haben.

Über den Definitionsbereich  $\mathcal{V}$  der Funktionen  $f(x)$  kann an dieser Stelle nicht viel Spezielles gesagt werden, da - abgesehen von den natürlichen Orthogonalfunktionen - die gesuchten Orthogonalfunktionen  $g_k(x)$  gerade von der Punktmenge  $\mathcal{V}$ , dem Definitionsbereich der Meßwertfelder  $f(x)$  abhängen. Ist zum Beispiel  $\mathcal{V} = [-1, 1]$ , so erhält man

$$\frac{1}{m(\mathcal{V})} \int_{\mathcal{V}} h(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h(x) dx.$$

Ist  $\mathcal{V}$  die Kugeloberfläche, so stellt  $x$  den Einsvektor im dreidimensionalen Raum dar, den man z.B. mit Hilfe der geographischen Koordinaten  $\phi$  und  $\lambda$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq +\frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \lambda < 2\pi$  realisieren kann, man erhält damit

$$\frac{1}{m(\mathcal{V})} \int_{\mathcal{V}} h(x) dx = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} h((\phi, \lambda)) d\lambda \cos \phi d\phi.$$

Unser Ziel besteht darin, die Funktion  $f \in \mathcal{H}$ , die von Raum und Zeit abhängig ist, näherungsweise durch eine Reihe mit Gliedern aus zwei Faktoren darzustellen, wobei der erste Faktor eine nur von der Zeit abhängige Zahl  $c$  und der zweite Faktor nur vom Ort  $x$  abhängig sind:

$$f(x) \approx f_K(x) = \sum_{k=1}^K c_k g_k(x). \quad (51)$$

Das über den Raum gemittelte Fehlerquadrat von  $f(x)$  soll für  $K = 1, 2, 3, \dots$  ein Minimum werden. Dabei müssen die bereits vorher (für ein kleineres  $K$ ) ermittelten Glieder der Reihe (51) ungeändert bleiben.

In Formeln:

$$||f-f_K||^2 = (f-f_K, f-f_K) = ||f||^2 - 2 \operatorname{Re} \{(f, f_K)\} + ||f_K||^2 = \text{Minimum}, \quad (52)$$

$\operatorname{Re}\{c\}$  ist der Realteil von  $c$ .

Nur wenn die  $g_k(x)$  zueinander orthogonal sind,

$$(g_k, g_n) = 0 \quad \text{für } k \neq n, \quad (53)$$

kann jedes bereits vorher ermittelte Glied der Reihe (51) ungeändert bleiben.

Dabei erhält man aus (52) durch Einsetzen der rechten Seite von (51)

$$||f-f_K||^2 = ||f||^2 - 2 \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \{c_k^*(f, g_k)\} + \sum_{k=1}^K |c_k|^2 ||g_k||^2,$$

und dieser Ausdruck wird minimal für

$$c_k = \frac{(f, g_k)}{||g_k||^2}; \quad (54)$$

denn man erhält damit:

$$||f-f_K||^2 = ||f||^2 - \sum_{k=1}^K |c_k|^2 ||g_k||^2 = \sum_{k=K+1}^{\infty} |c_k|^2 ||g_k||^2 \quad (55).$$

Die durch (54) definierten Koeffizienten  $c_k \in \mathcal{L}$  werden häufig auch verallgemeinerte Fourierkoeffizienten genannt. Da die linke Seite von (55) für jedes  $K$  gilt, folgt die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 ||g_k||^2 \leq ||f||^2. \quad (56)$$

Die  $g_k(x)$  sollen so gewählt sein, daß sie in  $\mathcal{V}$  ein vollständiges Orthogonalsystem bilden; dann wird in der Besselschen Ungleichung (56) das Gleichheitszeichen angenommen, was in der rechts stehenden Gleichung (55) verwendet wurde. Sollte nämlich in (56) nicht das Gleichheitszeichen gelten, so kann man zeigen, daß:

$$h(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k(x)$$

zu allen  $g_k$  orthogonal ist, aber wegen  $||h|| > 0$  nicht verschwindet. Das steht aber im Widerspruch zur Vollständig-

keit der  $g_k(x)$ , die besagt, daß es ein derartiges  $h \in \mathcal{H}$  nicht gibt.

Da die in (56) links stehende Reihe konvergiert, bilden die Reihenglieder eine Nullfolge

$$|c_k|^2 \|g_k\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \quad (57)$$

Damit ist klargestellt, daß die Bedeutung der Glieder der Reihe (51) für großes  $k$  mit wachsendem  $k$  abnimmt. Schließlich konvergiert die Reihe (51) mit wachsendem  $K$  bezüglich der Norm von  $\mathcal{H}$  gegen  $f(x)$ :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k(x). \quad (58)$$

Dies gilt exakt nur dann, falls bei der Definition des inneren Produkts durch Formel (49) der Lebesguesche Integralbegriff verwendet wurde. Die wesentliche Konsequenz aus der Verwendung dieses Integralbegriffs anstelle des üblichen Riemannschen Integrals besteht darin, daß in Formel (58) exakte Gleichheit nur für Werte von  $x$  bis auf eine Menge vom Maß Null besteht. Für einzelne - auch abzählbar unendlich viele - Punktwerte kann die Gleichung (58) falsch sein. Für typisch unstetige Erscheinungen wie z.B. die horizontale Verteilung des Regens, sollte man diese Einschränkung der Gleichung (58) jedoch im Gedächtnis behalten. Für Riemann-integrierbare, insbesondere für stetige Funktionen unterscheidet sich das Lebesguesche Integral nicht von dem üblichen Riemannschen Integral.

Wird eine Funktion  $f(x)$  gemäß Formel (58) durch die  $c_k$  dargestellt, so spricht man von einer spektralen Darstellung von  $f$ . Die  $c_k$  stellen das Spektrum von  $f$  dar. Jetzt soll noch einiges allgemeines zu den Orthogonalfunktionen  $g_k(x)$  gesagt werden. Ihre Reihenfolge ist nicht willkürlich. Das heißt, es muß ein Kriterium bestehen, nach dem sie angeordnet werden können. Nun bilden die Eigenfunktion eines linearen selbstadjungierten Operators im Hilbertraum ein vollständiges und angeordnetes System von Orthogonalfunktionen. Dann besteht das gesuchte Krite-

rium aus der Angabe des selbstadjungierten Operators  $A$ . Der Operator  $A$  bildet alle oder fast alle Funktionen  $f \in \mathcal{H}$  in Elemente des Hilbertraums ab

$$Af \in \mathcal{H} \quad \text{für } f \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}.$$

Der Definitionsbereich  $\mathcal{D}$  des Operators  $A$  muß dicht in  $\mathcal{H}$  sein. Das heißt, zu jedem  $\varepsilon > 0$  und jedem  $f \in \mathcal{H}$  gibt es ein  $h \in \mathcal{D}$  mit  $\|f-h\| < \varepsilon$ . Zwar läßt sich der Operator nicht immer auf alle Funktionen  $f \in \mathcal{H}$  anwenden, aber man kann stets eine Näherungsfunktion  $h$  angeben, auf die sich der Operator anwenden läßt. Da der Operator  $A$  Elemente von  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{H}$  abbildet, schreibt man auch  $A \in \mathcal{M} = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ .

$\mathcal{M}$  sei die Menge der linearen Operatoren. Die Linearität bedeutet:  $A(cf + ag) = cAf + aAg$

mit  $A \in \mathcal{M}$ ;  $c, a \in \mathcal{L}$  und  $f, g \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ .

Das bedeutet in Worten:

1. Die Abbildung der Summe von zwei Funktionen ist gleich der Summe ihrer Abbildungen und
2. Skalare Größen, also reelle oder komplexe Zahlen lassen sich vor den Operator ziehen.

Schließlich soll der Operator  $A$  selbstadjungiert sein, was auch hermitisch genannt wird; wird  $A$  durch eine reelle Matrix dargestellt, so sagt man  $A$  sei symmetrisch. Ein Operator  $A$  heißt selbstadjungiert, wenn gilt

$$(Ag, h) = (g, Ah) \quad (59)$$

für alle  $g, h \in \mathcal{D}$ .

Bildet  $A$  eine Funktion  $g \in \mathcal{H}$ ,  $g \neq 0$  in den gleichen ein-dimensionalen, linearen Unterraum ab

$$Ag = ag \quad (60)$$

mit  $a \in \mathcal{L}$ , so sagt man,  $g$  ist eine Eigenfunktion des Operators  $A$  und  $a$  der zugehörige Eigenwert. Durch die Transformation  $A$  wird die Funktion  $g \in \mathcal{H}$  nur mit einem Faktor  $a$ , dem Eigenwert, multipliziert. Wenn  $A$  selbstadjungiert ist, so folgt daraus, daß die Eigenwerte  $a$

reell sind; denn wählt man in (59)  $h = g$  und verwendet (60), so erhält man

$$(ag, g) = (g, ag),$$

zieht man rechts die Zahl  $a$  vor das innere Produkt, so erhält man dort ihren konjugiert-komplexen Wert  $a^*$ , links dagegen den Wert  $a$  selbst.

$$a(g, g) = a^*(g, g)$$

$$a||g||^2 = a^*||g||^2$$

$$(a - a^*)||g||^2 = 0$$

Aus  $g \neq 0$  folgt  $a = a^*$ , also ist  $a$  reell.

Außerdem wird  $A$  stets so gewählt, daß die Eigenwerte nicht negativ werden, dann lassen sich die Eigenvektoren besonders leicht anordnen. Wir haben also mit  $a = w_k^2$

$$A g_k = w_k^2 g_k \quad (61)$$

mit  $w_k^2 \in \mathcal{R}$ .

Bildet man rechts und links in Formel (61) das innere Produkt mit  $g_k$ , so erhält man

$$(A g_k, g_k) = w_k^2 ||g_k||^2. \quad (62)$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder die Eigenwerte wachsen monoton

$$0 \leq \dots \leq w_k^2 \leq w_{k+1}^2 \leq \dots$$

oder sie nehmen monoton ab

$$w_1^2 \geq \dots \geq w_k^2 \geq w_{k+1}^2 \geq \dots \geq 0$$

Im letzten Fall sind die Eigenwerte beschränkt; der Operator heißt in diesem Fall auch beschränkt.

Im ersteren Fall sind die Eigenwerte unbeschränkt.

Anderenfalls müßten sie sich im Endlichen häufen, dann würde auf der reellen Achse auch ein Bereich mit kontinuierlichen Eigenwerten existieren, das sind Fälle, die hier nicht betrachtet werden sollen.

Eigenfunktionen, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind stets zueinander orthogonal, denn setzt man in (59)  $g = g_n - g_k$  und  $h = g_n + g_k$  und verwendet Formel (61), so erhält man

$$(w_n^2 - w_k^2) \cdot \{(g_k, g_n) + (g_n, g_k)\} = 0.$$

Daraus folgt Realteil von  $(g_k, g_n) = 0$ .

Setzt man dagegen  $g = g_n - g_k$  und  $h = g_n - g_k$ , so folgt ganz entsprechend: Imaginärteil von  $(g_k, g_n) = 0$ , also sind  $g_k$  und  $g_n$  zueinander orthogonal.

Es kann jedoch vorkommen, daß es zu einem Eigenwert mehrere linear unabhängige Eigenvektoren gibt. Diese lassen sich jedoch immer orthogonalisieren. Zählt man diesen Eigenwert mehrfach, so läßt sich jeder Orthogonalfunktion genau ein Eigenwert zuordnen, doch sind die Orthogonalfunktionen mehrfacher Eigenwerte nicht eindeutig bestimmt. Die Orthogonalfunktionen einfacher Eigenwerte sind bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt. Ein vollständiges Orthogonalsystem liegt stets dann vor, wenn es keine Funktion  $f \in \mathcal{H}$  gibt, die zu allen Orthogonalfunktionen  $g_k$  orthogonal ist. Die hier betrachteten linearen Operatoren liefern stets vollständige Orthogonalsysteme.

Nach diesen allgemeinen grundlegenden Ausführungen über orthogonale Funktionen sollen, wie in der Einleitung bereits durchgeführt, zwei verschiedene Kriterien für die Auswahl der Orthogonalfunktionen zur Anwendung kommen.

Hat man keine statistischen Kenntnisse über die Funktion  $f \in \mathcal{H}$ , so verlangt man eine Anordnung der  $g_k$  nach der Stetigkeit, danach, wie glatt die Funktionen sind, wie lang der Abstand von Nullstelle bis Nullstelle, also wie lang ihre Wellenlänge ist. Das führt für A auf einen Differentialoperator zweiter Ordnung und die Eigenwerte sind proportional zum Quadrat der Wellenzahl.  $w_k$  ist also proportional zur Wellenzahl. Der Differentialoperator muß von zweiter Ordnung sein, damit die Eigenwerte nicht negativ werden. Außerdem zeigt sich, daß die  $g_k$



so angeordnet werden, daß der Mittelwert über das Quadrat der Ableitungen der  $g_k$  mit wachsenden  $k$  zunimmt. Die derart ausgewählten Orthogonalfunktionen werden von mir hier mathematische Orthogonalfunktionen genannt und im nächsten Kapitel genauer untersucht.

Hat man dagegen statistische Kenntnisse über die  $f(x)$ , so ordnet man die  $g_k$  nach den über den Raum gemittelten Varianzen. Das heißt, man bestimmt die zeitunabhängigen Orthogonalfunktionen so, daß das über Raum und Zeit gemittelte Fehlerquadrat ein Minimum wird. Die Koeffizienten  $c_k$  in der Reihe (58) sind dabei rein zeitabhängig. Die räumlich gemittelten Varianzen werden durch die Eigenwerte  $w_k^2$  dargestellt. Sie nehmen mit wachsendem  $k$  ab. Der Operator ist ein Integraloperator, dessen Kern die Kovarianzfunktion von  $f(x)$  darstellt. In sie geht die Kovarianz jedes Punktes  $x \in \mathcal{V}$  mit jedem Punkt  $y \in \mathcal{V}$  ein. Die danach ausgewählten Funktionen heißen natürliche Orthogonalfunktion; sie werden im übernächsten Kapitel genauer untersucht.

Ausführliche Darstellungen über orthogonale Funktionen bringen SMIRNOW (1962 b), TRICOMI (1955) und LENSE (1954). Eine Zusammenstellung von entsprechenden Formeln findet man bei MAGNUS u.a. (1966) und bei ABRAMOWITZ u.a. (1965), wobei die letztere Arbeit auch Tabellen und Formeln für numerische Rechnungen enthält.

### 3. EIGENSCHAFTEN SPEZIELLER MATHEMATISCHER ORTHOGONALFUNKTIONEN

#### 3.1. Auf einer geschlossenen Kurve - die Kreisfunktionen -

Die typische mathematische Orthogonalfunktion ist die Fourierreihe, die hier zunächst in ihrer komplexen Form betrachtet werden soll. Der Definitionsbereich  $\mathfrak{J}$  unserer Felder sei also eine geschlossene Kurve der Länge  $2\pi$ .  $\mathfrak{J}$  besteht aus allen komplexwertigen Funktionen  $f(x)$  mit der Periode  $2\pi$  mit

$$||f||^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

Für das innere Produkt von  $f, g \in \mathfrak{J}$  nimmt Formel (49) jetzt folgende Gestalt an:

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g^*(x) dx. \quad (63)$$

Als Kriterium für die Anordnung der Orthogonalfunktionen soll deren Stetigkeit verwendet werden. Diese wird proportional zu dem Differentialquotienten angesehen, deshalb ist der Ausdruck

$$w^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(x) \cdot g'(x)^* dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g'(x)|^2 dx = ||g'||^2 \quad (64)$$

mit  $g'(x) = \frac{dg(x)}{dx}$

sicher ein geeignetes Kriterium.

Je kleiner  $w^2$  ist, desto glatter, desto stetiger sind die Funktionen  $g(x)$ .

Formel (64) läßt sich partiell integrieren:

$$w^2 = \frac{1}{2\pi} \left[ g(x)' \cdot g^*(x) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(x) g^*(x) dx$$

mit  $g''(x) = \frac{d^2g(x)}{dx^2}$ .

Der erste Summand rechts fällt wegen der Periodizität von  $g'(x)$  und  $g(x)$  weg:  $w^2 = (-g'', g)$ .

Der Vergleich mit Formel (62) legt es nahe, für den Eigenwertoperator

$$A = - \frac{d^2}{dx^2}$$

zu nehmen. Da dies ein Differentialoperator (zweiter Ordnung) ist, soll statt A der Buchstabe D genommen werden:

$$D = - \frac{d^2}{dx^2}. \quad (65)$$

Der Definitionsbereich  $\mathcal{L}$  von D umfaßt gemäß Formel (64) alle komplexwertigen Funktionen  $g(x)$  mit der Periode  $2\pi$ , deren Ableitung nach  $x$  quadratisch Lebesgue-integrabel sind, für die also der in (64) rechts stehende Ausdruck existiert. Es ist klar, daß  $\mathcal{L}$  eine echte Untermenge von  $\mathcal{V}$  ist.

Jetzt soll gezeigt werden, daß D selbstadjungiert ist. Das bedeutet gemäß Formel (59)

$$(Dg, h) - (g, Dh) = 0$$

für alle  $g, h \in \mathcal{L}$ .

Mit der Definition (65) von D und der Definition (63) des inneren Produkts, erhält man

$$\begin{aligned} (Dg, h) - (g, Dh) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{-g''(x) h^*(x) + g(x) h''^*(x)\} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ -g'(x) h^*(x) + g(x) h'^*(x) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{g'(x) h'(x)^* - g'(x) h'(x)^*\} dx = \\ &= (Dg, h) - (g, Dh) = 0. \end{aligned} \quad (66)$$

Dabei verschwindet der erste Summand rechts wegen der Periodizität von  $g(x)$  und  $h^*(x)$  und deren Ableitungen.

Für die Eigenfunktionen  $g_n \in \mathcal{L}$  und die Eigenwerte  $w_n^2 \in \mathcal{R}$  sieht die Eigenwertgleichung (61) jetzt folgendermaßen aus:

$$- g_n''(x) = w_n^2 g_n(x) \quad (67)$$

mit den über  $2\pi$  periodischen Lösungen

$$g_n(x) = e^{inx} \quad (68)$$

und den Eigenwerten

$$w_n^2 = n^2 \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (69)$$

Für  $n \neq 0$  gibt es zu jedem Eigenwert  $n^2$  genau zwei orthogonale Eigenfunktionen, die für  $n \neq 0$  auch anders als in (68) gewählt werden können

$$(\text{z.B. } \frac{1}{\sqrt{2}} \sin nx \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cos nx), \quad (70)$$

Die mathematischen Eigenfunktionen werden stets normiert angegeben. Das heißt

$$||g_k|| = \sqrt{(g_k, g_k)} = 1. \quad (71)$$

Diese Beziehung läßt sich sowohl für die durch (68) als auch für die durch (70) gegebenen Eigenfunktionen leicht nachweisen.

Auch die Orthogonalitätsrelation (47) läßt sich leicht zeigen:

$$(g_n, g_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases}. \quad (72)$$

Sei  $f$  eine beliebige Funktion aus  $\mathcal{L}_2$ , so läßt sich  $f(x)$  wie in Formel (58) durch die folgende Reihe darstellen:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \quad (73)$$

Dabei kann man den komplexen Koeffizienten  $c_n \in \mathcal{L}$  aus Formel (54) berechnen, der sich wegen der Normierung zunächst zu

$$c_k = (f, g_k) \quad (74)$$

vereinfacht und speziell lautet

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx. \quad (75)$$

Diese Koeffizienten müssen mit wachsendem  $|n|$  gemäß der Besselschen Ungleichung (56) eine Nullfolge bilden. Ihr Absolutbetrag stellt die Amplitude jeder Einzelwelle, ihr Zeiger  $\alpha_n$  die Phase jeder Einzelwelle dar; denn man erhält mit  $c_n = |c_n| e^{i\alpha_n}$  für das  $n$ -te Glied der Reihe den Ausdruck

$$c_n e^{inx} = |c_n| e^{i(nx+\alpha_n)}.$$

Für  $\alpha_n = 0$  liegt das Maximum der Welle in der Mitte des Intervalls.

Die speziellen Eigenschaften dieser Orthogonalfunktionen und ihrer Eigenwerte, die für die Anordnung der Eigenfunktion maßgebend sind, sollen noch einmal zusammengestellt werden:

1. Der Eigenwert ist das Normquadrat der Ableitung der Eigenfunktion nach der Ortsvariablen (Formel (64)).
2. Betrachtet man den negativen Wert der zweiten Ableitung, wobei man die zweite Ableitung auch als eindimensionalen Laplace-Operator ansehen kann, als das Maß für die Krümmung, so stellt der Eigenwert genau den Faktor dar, um den die Krümmung der Eigenfunktion größer ist als die Eigenfunktion selbst. Der Wert der Eigenfunktion selbst und ihre Krümmung sind zueinander proportional. Das ergibt sich alles aus Formel (67).
3. Der Eigenwert ist das Quadrat der Wellenzahl der Eigenfunktionen. Die Anzahl der Maxima oder der Minima oder die halbe Anzahl der Nullstellen einer Eigenfunktion wird durch die Wurzel ihres Eigenwertes gegeben.  
Dementsprechend ist der Abstand zwischen zwei Extrema der Wurzel aus dem Eigenwert umgekehrt proportional.

Die zuletzt angesprochene Eigenschaft schafft auch Klarheit über die sogenannte maxivale Auflösung eine Funktion  $f_N(x)$ , die durch eine endliche Teilreihe der Form (51) dargestellt wird:

$$f_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}, \quad (76)$$

dabei seien die  $c_n$  durch Formel (75) gegeben:

Versteht man unter maximaler Auflösung von  $F_N(x)$  den kleinst möglichen Abstand zwischen einem Maximum und einem Minimum, so beträgt er  $2\pi/N$ .

Weitere Literatur zu diesem Abschnitt bei ORSZAG (1954), COOLEY u.a. (1965) und BARRY (1973).

### 3.2. Orthogonalfunktionen auf der Kugeloberfläche - die Kugelflächenfunktionen -

War der Definitionsbereich  $\mathcal{V}$  der bisher betrachteten mathematischen Orthogonalfunktionen eine geschlossene Kurve, so soll jetzt zu einer höheren Dimension von  $\mathcal{V}$  übergegangen werden.  $\mathcal{V}$  sei also die Oberfläche einer Kugel, wobei aus Vereinfachungsgründen, deren Radius = 1 gesetzt wird. Ein Punkt  $x$  auf dieser Kugel  $\mathcal{V}$  wird jetzt durch zwei Koordinaten  $\phi$  und  $\lambda$  dargestellt. Es sollen die geographischen Koordinaten verwendet werden,  $\phi$  sei die geographische Breite und  $\lambda$  die geographische Länge.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\pi < \lambda \leq \pi.$$

Für das Oberflächenelement  $dx$  erhält man

$$dx = \cos \phi \, d\lambda \, d\phi, \quad (77)$$

$\mathcal{H}$  besteht aus allen komplexwertigen eindeutigen Funktionen  $f(x) = f(\phi, \lambda)$  mit

$$||f|| = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\phi, \lambda)|^2 \cos \phi \, d\lambda \, d\phi = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} |f(x)|^2 dx < +\infty. \quad (78)$$

Das zweite (einfache) Integral soll die gleiche Bedeutung wie der links danebenstehende Ausdruck haben.

Für das innere Produkt von  $f, g \in \mathcal{H}$  erhält man jetzt

$$(f, g) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi, \lambda) \cdot g(\phi, \lambda)^* \cos \phi \, d\lambda \, d\phi. \quad (79)$$

Die Formel (79) wurde ganz analog zu dem Ausdruck für das innere Produkt auf einer geschlossenen Kurve der Formel (63) gebildet. Will man ganz entsprechend wie dort weitergehen, so tritt eine eigenartige Schwierigkeit auf. Der Differentialquotient von  $g \in \mathcal{H}$  nach  $dx$  läßt sich nicht mehr eindeutig bilden, er hängt von der Richtung ab, in der man fortschreitet, man erhält als Ergebnis keinen skalaren Wert mehr, sondern einen zweidimensionalen Vektor. Schon aus diesem Grunde kann der Differentialquotient kein Element des ursprünglichen Hilbertraums  $\mathcal{H}$  sein. Bezeichnet man auf der Kugeloberfläche den Einsvektor in zonaler Richtung ( $\lambda$ -Richtung) mit  $\vec{i}$  und in meridionaler Richtung ( $\phi$ -Richtung) mit  $\vec{j}$ , so wird der Gradient einer Funktion  $g \in \mathcal{H}$  durch folgenden Ausdruck gegeben;

$$\text{grad } g = \frac{\partial g}{\cos \phi \partial \lambda} \vec{i} + \frac{\partial g}{\partial \phi} \vec{j}. \quad (80)$$

Dieses neu entstandene Vektorfeld gehört einem Raum  $\mathcal{H}^2$  an, von dem später gezeigt wird, daß es auch ein Hilbertraum ist. Die Definition des inneren Produkts im  $\mathcal{H}^2$  erfolgt ganz analog zu Formel (79), doch muß bei der Multiplikation der beiden Elemente aus  $\mathcal{H}^2$  unter dem Integralzeichen das übliche Skalarprodukt der beiden Vektorfelder gebildet werden. Jetzt kehrt man zur Formel (64) zurück und überlegt sich einen analogen Weg für die Kugeloberfläche. Als Analogon des Differentialquotienten wird der Gradient von  $g$  gewählt. Dann ist der Ausdruck

$$\begin{aligned} w^2 &= \frac{1}{m(\mathcal{V})} \int_{\mathcal{V}} \text{grad } g \cdot \text{grad } g^* dx = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \text{grad } g \cdot \text{grad } g^* \cos \phi d\lambda d\phi = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \left| \frac{\partial g}{\cos \phi \partial \lambda} \right|^2 + \left| \frac{\partial g}{\partial \phi} \right|^2 \right\} \cos \phi d\lambda d\phi = \\ &= ||\text{grad } g||^2 \end{aligned} \quad (81)$$

ein geeignetes Kriterium für die Anordnung der orthogonalen mathematischen Funktionen auf der Kugeloberfläche sein. Übrigens ist die zuletzt angegebene Norm die Norm in  $\mathcal{H}^2$ , da  $\text{grad } g \in \mathcal{H}^2$ .

Die rechte Seite von (81) soll jetzt partiell integriert werden. Zunächst soll unter dem Integralzeichen eine Umformung vorgenommen werden. Dazu verwendet man die Identität

$$\text{div} (f \cdot \text{grad } g) = f \text{ div grad } g + \text{grad } f \cdot \text{grad } g. \quad (82)$$

Setzt man  $f = g^*$ , so erhält man aus Formel (81) und (82)

$$w^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \text{div} (g^* \text{grad } g) dx - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} g^* \text{div grad } g dx. \quad (83)$$

Der erste Summand auf der rechten Seite von (83) stellt das Integral der Divergenz über die Kugeloberfläche dar, das muß jedoch nach dem Gauß'schen Satz und wegen der hier angenommenen Eindeutigkeit und Stetigkeit von  $g$  verschwinden. Im zweiten Summanden steht rechts unter dem Integralzeichen der Laplace-Operator, hier auf der zweidimensionalen Kugeloberfläche, Ganz analog wie bei der Formel (65) kann man als Eigenwertoperator  $A = D$  für die Kugeloberfläche den Ausdruck  $-\text{div grad}$ , also den negativen Laplace-Operator nehmen

$$D = - \text{div grad}. \quad (84)$$

Der Definitionsbereich  $\mathcal{D}$  von  $D$  besteht gemäß Formel (81) aus allen  $g \in \mathcal{H}$  mit  $(\text{grad } g) \in \mathcal{H}^2$ , für die also  $\|\text{grad } g\|$  existiert und endlich bleibt.

Der Divergenzoperator auf der Kugeloberfläche wird definiert durch

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial (\vec{v} \cdot \vec{i})}{\partial \lambda} + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial (\cos \phi \cdot \vec{v} \cdot \vec{j})}{\partial \phi} \quad (85)$$

mit  $\vec{v} \in \mathcal{H}^2$ .

Für den Operator  $D$  erhält man damit den ausführlichen Ausdruck



$$Dg = - \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2} - \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial g}{\partial \phi} \right), \quad (86)$$

$$Dg = - \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2} + \operatorname{tg} \phi \frac{\partial g}{\partial \phi}.$$

Die Selbstadjungiertheit von D ergibt sich aus dem zweiten Greenschen Satz:

$\int \{h^* Dg - g Dh^*\} dx =$  Linienintegral über den Rand der Kugeloberfläche  $\mathcal{V}$ , da die rechte Seite verschwindet und die linke gleich

$$(Dg, h) - (g, Dh)$$

für alle  $f, g \in \mathcal{L} \subset \mathcal{V}$  ist.

Für die Eigenfunktionen  $g_n^m \in \mathcal{L}$  und die Eigenwerte  $w_n^2 \in \mathcal{R}$  sieht die Eigenwertgleichung  $Dg_n^m = w_n^2 g_n^m$  folgendermaßen aus:

$$- \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 g_n^m(\phi, \lambda)}{\partial \lambda^2} - \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial g_n^m(\phi, \lambda)}{\partial \phi} \right) = w_n^2 g_n^m(\phi, \lambda). \quad (89)$$

Macht man den Separationsansatz

$$g_n^m(\phi, \lambda) = P_n^m(\sin \phi) h_m(\lambda) \quad \text{und setzt } z = \sin \phi;$$

$$dz = \cos \phi \, d\phi,$$

so erhält man nach Division durch  $g_n^m(\phi, \lambda)/(1-z^2)$

$$- \frac{h_m''(\lambda)}{h_m(\lambda)} - \frac{1-z^2}{P_n^m(z)} \frac{d}{dz} \left( (1-z^2) \frac{d P_n^m(z)}{dz} \right) = (1-z^2) w_n^2.$$

Der erste Summand hängt nicht von  $z$ , der übrige Teil nicht von  $\lambda$  ab, daher erhält man die zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen mit der Separationskonstanten  $m^2$

$$- h_m''(\lambda) = m^2 h_m(\lambda)$$

und

$$\frac{d}{dz} \left( (1-z^2) \frac{d P_n^m(z)}{dz} \right) + \left( - \frac{m^2}{1-z^2} + w_n^2 \right) P_n^m(z) = 0$$

mit den Lösungen

$$h_m(\lambda) = e^{im\lambda};$$

die  $P_n^m(z)$  stellen auf Grund der Differentialgleichung die zugeordneten Legendre'schen Funktionen dar, die außerdem normiert sein sollen:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (P_n^m(z))^2 dz = 1. \quad (90)$$

Diese Eigenfunktionen werden auch als Kugelflächenfunktionen  $Y_n^m(\phi, \lambda)$  bezeichnet:

$$g_n^m(\phi, \lambda) = Y_n^m(\phi, \lambda) = P_n^m(\sin \phi) e^{im\lambda}. \quad (91)$$

Die Eigenwerte hängen nur von  $n$  ab

$$w_n^2 = n(n+1) \quad (92)$$

und zu jedem Eigenwert gibt es  $2n+1$  zueinander orthogonale Eigenfunktionen mit  $m = 0, \pm 1, \dots, \pm n$ , die auch anders als hier angegeben, gewählt werden können; man kann jedes System orthogonaler Funktionen nehmen, das aus Linearkombinationen der angegebenen Funktionen besteht.

Die Kugelflächenfunktionen erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$(Y_n^m, Y_{n'}^{m'}) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq n' \text{ oder } m \neq m' \\ 1 & \text{für } n = n' \text{ und } m = m' \end{cases}. \quad (93)$$

Ist  $f(\phi, \lambda)$  eine beliebige auf der Kugeloberfläche definierte Funktion, die dort quadratisch Lebesgue-integrabel ist, also die Bedingung (78) erfüllt, so läßt sich  $f(\phi, \lambda)$  wie in Formel (58) durch folgende Reihe darstellen:

$$f(\phi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^m Y_n^m(\phi, \lambda). \quad (94)$$

Dabei kann man den komplexen Koeffizienten  $c_n^m \in \mathcal{L}$  mit Hilfe der Formel

$$c_n^m = (f, Y_n^m) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-\pi}^{\pi} f(\arcsin z, \lambda) e^{-im\lambda} d\lambda P_n^m(z) dz \quad (95)$$

berechnen.

Die  $c_n^m$  bilden mit wachsendem  $n$  eine Nullfolge.

Ihr Absolutbetrag ist gleich der Wurzel aus dem mittleren Amplitudenquadrat jeder Einzelwelle.

Die speziellen Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen und ihrer Eigenwerte, die für die Reihenfolge der Eigenfunktionen maßgebend sind, unterscheiden sich nur ganz geringfügig von den entsprechenden Angaben für die Funktionen  $e^{inx}$ ;

1. Der Eigenwert ist das Normquadrat des Gradienten der Kugelflächenfunktion, dabei ist dieser Gradient eine vektorielle Funktion, er liegt in  $\mathcal{H}^2$  und nicht in  $\mathcal{H}$ .
2. Betrachtet man den negativen Wert von  $\text{div grad}$ , ein Ausdruck, der auch zweidimensionaler Laplace-Operator auf der Kugeloberfläche genannt wird, als das Maß für die Flächenkrümmung, so stellt der Eigenwert genau den Faktor dar, um den die Flächenkrümmung der Kugelflächenfunktion größer ist als die Kugelflächenfunktion selbst. Der Wert der Kugelflächenfunktion selbst und ihre Flächenkrümmung sind zueinander proportional.
3. Der Eigenwert hat den Wert von Wellenzahl mal (Wellenzahl + 1). Dabei versteht man unter Wellenzahl, die Wellenzahl längs geeignet gewählter Großkreise. Sie wird auch häufig Großkreiswellenzahl genannt. Sie gibt die Anzahl der dort liegenden Maxima, bzw. Minima an, die auch in der dazu senkrechten Richtung ein Maxima bzw. Minima darstellen, bzw. konstant bleiben. Dementsprechend ist der Abstand zwischen zwei relativen Flächenextrema, der Wellenzahl umgekehrt proportional. Versteht man unter maximaler Auflösung der Teilreihe

$$f_N(\phi, \lambda) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n c_n^m y_n^m(\phi, \lambda) \quad (96)$$

den kleinst-möglichen Abstand zwischen einem Maximum und einem Minimum bzw. zwischen einem Grat und einem Tal, so beträgt er  $2\pi/N$ .

Weitere Literatur zu diesem Abschnitt bei LENSE (1954), ABRAMOWITZ u.a. (1965), ROSE (1957), EDMONDS (1957), BAER u.a. (1961), MÜLLER (1966), BRINK u.a. (1968), EFIMOV (1969), AARDOOM (1969), ROBERT (1970), ROCHAS (1973), ORSZAG (1974) und JAMES (1976).

### 3.3. Mathematische Orthogonalfunktionen auf der Kugeloberfläche - die orthogonalen Vektorfunktionen

Bereits weiter oben bei der Ableitung von Funktionen auf der Kugeloberfläche erhielt man vektorwertige Funktionen, die auf der Kugeloberfläche definiert waren. Es soll untersucht werden, ob diese auch einen Hilbertraum, der mit  $\mathcal{H}^2$  bezeichnet werden soll, bilden und wie man entsprechende mathematische orthogonale Funktionen im  $\mathcal{H}^2$  finden kann.

Der Definitionsbereich  $\mathcal{V}$  sei weiterhin die Kugeloberfläche, dort seien geographische Koordinaten  $\phi, \lambda$  eingeführt und es sei  $z = \sin \phi$ , die Projektion auf die Erdachse.

$\vec{i}$  und  $\vec{j}$  seien die Einsvektoren auf der Kugeloberfläche in  $\lambda$ - und in  $\phi$ -Richtung. Zwei Vektorfunktionen  $\vec{g}, \vec{v} \in \mathcal{H}^2$  auf der Kugeloberfläche  $\mathcal{V}$  werden also durch die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\vec{g}(\phi, \lambda) &= p(\phi, \lambda) \cdot \vec{i} + q(\phi, \lambda) \cdot \vec{j} \\ \vec{v}(\phi, \lambda) &= u(\phi, \lambda) \cdot \vec{i} + v(\phi, \lambda) \cdot \vec{j}\end{aligned}\quad (97)$$

gegeben und ihr inneres Produkt durch

$$(\vec{v}, \vec{g}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \{u(\phi, \lambda) p^*(\phi, \lambda) + v(\phi, \lambda) q^*(\phi, \lambda)\} \cos \phi \, d\lambda \, d\phi. \quad (98)$$

Ferner muß der Ausdruck

$$||\vec{v}||^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \{|u(\phi, \lambda)|^2 + |v(\phi, \lambda)|^2\} \cos \phi \, d\lambda \, d\phi \quad (99)$$

existieren und einen endlichen Wert haben, damit  $\vec{v}$  ein Element des Hilbertraums  $\mathcal{H}^2$  ist.

Ein Hinweis ist angebracht: Im allgemeinen sind sowohl die Aussage  $u, v \in \mathcal{H}$  als auch  $\vec{i}, \vec{j} \in \mathcal{H}^2$  falsch. Das heißt, die Komponentenfunktionen lassen sich im allgemeinen nicht durch Reihen von Kugelflächenfunktionen darstellen und eine konstante Vektorfunktion, auch mit nur einer Komponente, ist auf der Kugeloberfläche unstetig, Näheres findet man in FECHNER (1973).

Um auch hier den geeigneten Eigenwertoperator  $D$  zu finden, überlegt man sich, welche Differentialquotienten man von den  $\vec{v} \in \mathcal{H}^2$  bilden kann. Den Divergenzoperator haben wir bereits früher kennengelernt (Formel 85). Mit den Bezeichnungen von (97) erhält man

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial (\cos \phi \cdot v)}{\partial \phi} \quad (100)$$

Das Ergebnis ist ein Skalar:  $\operatorname{div} \vec{v} \in \mathcal{H}$ .

Die Vertikalkomponente des Rotationsoperators  $\operatorname{rot}_R$ , die hier mit der in der Meteorologie üblichen Bezeichnung "Vorticity" belegt werden soll, ist ebenfalls ein Skalar:

$$\operatorname{rot}_R \vec{v} = \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial (\cos \phi \cdot u)}{\partial \phi} \quad (101)$$

$\operatorname{div}$  und  $\operatorname{rot}_R$  sind - bis auf Linearkombinationen - die einzigen beiden linearen Differentialoperatoren erster Ordnung, die eine in  $\mathcal{H}^2$  dichte Untermenge in  $\mathcal{H}$  abbilden. Aus diesem Anlaß nehmen wir als Kriterium für die Anordnung der orthogonalen Vektorfunktionen auf der Kugeloberfläche den Ausdruck

$$w^2 = ||\operatorname{div} \vec{v}||^2 + ||\operatorname{rot}_R \vec{v}||^2 \quad (102)$$

mit  $\vec{v} \in \mathcal{H}^2$ ;  $\operatorname{div} \vec{v}, \operatorname{rot}_R \vec{v} \in \mathcal{H}$ .

$w^2$  ist - etwas unpräzise ausgedrückt - das über die Kugeloberfläche gemittelte Quadrat der Ableitung von  $\vec{v}$  nach der Ortsvariablen  $x$ . Unter Verwendung der Identität

$$\operatorname{div}(\vec{v} \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \times \operatorname{rot}_R \vec{v}) = \vec{v} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} - \vec{v} \operatorname{rot} \operatorname{rot}_R \vec{v} + \operatorname{div} \vec{v} \cdot \operatorname{div} \vec{v} + \operatorname{rot}_R \vec{v} \cdot \operatorname{rot}_R \vec{v} \quad (103)$$

läßt sich der Ausdruck (102) in zwei Anteile umformen: Der

eine Anteil ist das Integral über die Kugelfläche von dem links in (103) stehenden Divergenzausdruck. Dieser Anteil verschwindet wegen der Integration über die geschlossene Kugelfläche, so daß nur der zweite Anteil übrig bleibt

$$w^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \{-\vec{v}^* \cdot \text{grad div } \vec{v} + \vec{v}^* \cdot \text{rot rot}_R \vec{v}\} \cos \phi \, d\lambda \, d\phi =$$

$$w^2 = -(\text{grad div } \vec{v} - \text{rot rot}_R \vec{v}, \vec{v}). \quad (104)$$

Dabei stellt der Operator rot eine Abbildung von  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{H}^2$  dar

$$\text{rot } f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial \phi} - \vec{j} \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial f}{\partial \lambda}. \quad (105)$$

Aus Formel (104) erkennt man, daß als Eigenwertoperator für  $\mathcal{H}^2$  der negative Pseudovektor Laplace-Operator

$$D = -\text{grad div} + \text{rot rot}_R \quad (106)$$

zu nehmen ist. Die Eigenwertgleichung lautet

$$-\text{grad div } \vec{g} + \text{rot rot}_R \vec{g} = w^2 \vec{g} \quad (107)$$

mit  $\vec{g} \in \mathcal{H}^2$ .

Diese Gleichung und das Rechnen mit den vektoriellen Eigenvektorfunktionen auf der Kugeloberfläche ist in der Arbeit von FECHNER (1973) eingehend untersucht worden: Hier sollen nur die Ergebnisse zusammengestellt werden.

Die Eigenwertgleichung (107) hat die gleichen Eigenwerte wie die skalare Laplace Gleichung (89) auf der Kugeloberfläche

$$-\text{grad div } \mathcal{Y}_k(\phi, \lambda) + \text{rot rot}_R \mathcal{Y}_k(\phi, \lambda) = n(n+1) \mathcal{Y}_k(\phi, \lambda) \quad (108)$$

$\mathcal{Y}_k \in \mathcal{H}^2$ , jedoch fehlt der Wert  $w^2 = 0$  und jeder übrige Eigenwert tritt doppelt so häufig auf als im skalaren Fall.

Die Eigenfunktionen  $\mathcal{Y}_k(\phi, \lambda)$  sind genau die Ableitungen der Kugelflächenfunktionen

$$\mathcal{Y}_n^{m,0}(\phi, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \operatorname{grad} Y_n^m(\phi, \lambda) \quad (109)$$

$$\mathcal{Y}_n^{m,1}(\phi, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \operatorname{rot} Y_n^m(\phi, \lambda) .$$

Für die Ableitungen der vektoriellen Eigenfunktionen erhält man wiederum Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathcal{Y}_n^{m,0}(\phi, \lambda) &= -\sqrt{(n+1)n} Y_n^m(\phi, \lambda) \\ \operatorname{rot}_R \mathcal{Y}_n^{m,0}(\phi, \lambda) &= 0 \\ \operatorname{rot}_R \mathcal{Y}_n^{m,1}(\phi, \lambda) &= \sqrt{n(n+1)} Y_n^m(\phi, \lambda) \\ \operatorname{div} \mathcal{Y}_n^{m,1}(\phi, \lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (110)$$

Die durch (109) definierten orthogonalen Vektorfunktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in  $\mathcal{H}^2$

$$(\mathcal{Y}_n^{m,s}, \mathcal{Y}_{n'}^{m',s'}) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq n' \text{ oder } m \neq m' \text{ oder } s \neq s' \\ 1 & \text{für } n=n' \text{ und } m=m' \text{ und } s=s' \end{cases} \quad (111)$$

Zu jedem Eigenwert  $n(n+1)$  gibt es  $4n + 2$  orthogonale Eigenfunktionen mit  $m = -n, \dots, 0, \dots, n$  und  $s = 0, 1$ . Alle Eigenfunktionen sind beliebig oft differenzierbar und natürlich überall stetig. Bei der Differentiation bleiben sowohl die Großkreiswellenzahl  $n$  als auch die zonale Wellenzahl  $m$  erhalten.

Der Definitionsbereich des Operators (106) besteht aus allen  $\vec{v} \in \mathcal{H}^2$ , deren Divergenz und Vorticity in  $\mathcal{H}$  liegen, für die also der Ausdruck auf der rechten Seite von (102) gebildet werden kann und endlich bleibt.

Ist  $\vec{v}(\phi, \lambda)$  eine beliebige, auf der Kugeloberfläche definierte Vektorfunktion, deren Vektornorm dort quadratisch Lebesgue-integrierbar ist, für die also der Ausdruck (99) einen endlichen Wert hat, so läßt sich  $\vec{v}(\phi, \lambda)$  durch die Reihe

$$\vec{v}(\phi, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \{c_n^{m,0} \mathcal{Y}_n^{m,0}(\phi, \lambda) + c_n^{m,1} \mathcal{Y}_n^{m,1}(\phi, \lambda)\} \quad (112)$$

darstellen. Dabei lassen sich die Koeffizienten  $c_n^{m,s}$  aus

$$c_n^{m,s} = (\vec{v}, \mathcal{Y}_n^{m,s}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{v}(\phi, \lambda) \cdot \mathcal{Y}_n^{m,s}(\phi, \lambda)^* \cos \phi \, d\lambda \, d\phi \quad (113)$$

berechnen.

Die speziellen Eigenschaften der orthogonalen Vektorfunktionen auf der Kugeloberfläche und ihrer Eigenwerte sind:

1. Der Eigenwert ist gleich der Summe der Normquadrate der Divergenz und der Vorticity der orthogonalen Vektorfunktion. Divergenz und Vorticity liegen nicht in unserem vektoriellen Hilbertraum  $\mathcal{V}^2$ , sondern im skalarwertigen Raum  $\mathcal{H}$ .
2. Betrachtet man den Ausdruck  $-\text{grad div} + \text{rot rot}_R$ , den man auch als negativen zweidimensionalen vektoriellen Laplace-Operator auffassen kann, als das Maß für die Flächenkrümmung einer Vektorfunktion, deren Vektoren parallel zur Fläche liegen, so stellt der Eigenwert genau den Faktor dar, um den die Flächenkrümmung der orthogonalen Vektorfunktion größer ist als die ursprüngliche orthogonale Vektorfunktion selbst. Der Wert der Flächenkrümmung und die orthogonale Vektorfunktion selbst sind zueinander proportional und stimmen auch in ihrer Richtung miteinander überein.
3. Der Eigenwert hat - wie bei den Kugelflächenfunktionen - den Wert von Wellenzahl mal (Wellenzahl +1). Einen Eigenwert Null, bzw. eine Wellenzahl Null gibt es jedoch nicht.

Unter Wellenzahl versteht man die Anzahl von Perioden längs geeignet gewählter Großkreise. Im Abstand einer solchen Periode stimmen die Vektoren in ihrer Länge und in ihrer Richtung relativ zu dem betreffenden Großkreis miteinander überein. Diese Wellenzahl wird auch Großkreiswellenzahl genannt. Diese Großkreise sind stets durch die kürzesten Abstände von zwei



Nullstellen zu legen. Die Wellenzahl ist stets gleich der halben Anzahl der Nullstellen auf einem solchen Großkreis.

Versteht man unter maximaler Auflösung der Teilreihe

$$\vec{v}_N(\phi, \lambda) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n \{c_n^{m,0} y_n^{m,0}(\phi, \lambda) + c_n^{m,1} y_n^{m,1}(\phi, \lambda)\} \quad (114)$$

den kleinsten möglichen Abstand zwischen zwei Nullstellen, so beträgt er  $2\pi/N$ .

4. Unter der zonalen Wellenzahl  $m$  versteht man die Anzahl von Perioden längs geeignet gewählter Breitenkreise. Im Abstand einer solchen Periode stimmen die Vektoren in ihrer Länge und ihrer Richtung relativ zu dem betreffenden Breitenkreis miteinander überein. Diese Breitenkreise sind stets durch Nullstellen zu legen. Die Wellenzahl ist stets gleich der halben Anzahl der Nullstellen auf einem solchen Breitenkreis.
5. Es gibt divergenzfreie, rein rotationelle orthogonale Vektorfunktionen  $y_n^{m,0}(\phi, \lambda)$  einerseits und rotationsfreie, rein divergente orthogonale Vektorfunktionen  $y_n^{m,1}(\phi, \lambda)$  andererseits. Für jedes  $n$  und  $m$  entsteht das eine Feld aus dem anderen durch Drehung aller Vektoren in der Kugeloberfläche um einen rechten Winkel.

Weitere spezielle Eigenschaften der orthogonalen Vektorfunktionen und die anschaulichen Darstellungen der einfachsten Orthogonalfunktionen durch Pfeile auf einer Hammer-Projektion findet man bei FECHNER (1973).

Weitere Literatur zu diesem Abschnitt findet man bei ROSE (1957), MÜLLER (1966), EFIMOV (1969), SIMMONDS (1973) und JAMES (1976).

### 3.4. Orthogonalfunktionen auf einer Strecke - die Legendre'schen Polynome -

Bei den bisher behandelten mathematischen Orthogonalfunktionen war der Definitionsbereich  $\mathcal{D}$  stets geschlossen, er besaß keinen Rand. Jetzt sei  $\mathcal{D}$  eine Strecke der Länge 2

$$\mathcal{D} = [-1, 1] .$$

$\mathcal{H}$  besteht jetzt aus allen auf  $\mathcal{D}$  definierten Funktionen  $f(x)$  mit

$$||f|| = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx < +\infty. \quad (115)$$

Für das innere Produkt von  $f, g \in \mathcal{H}$  ist jetzt zu setzen

$$(f, g) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) g^*(x) dx. \quad (116)$$

Als Kriterium für die Anordnung der Orthogonalfunktionen soll wieder das Quadrat eines Differentialquotienten verwendet werden. Anschließend wurde stets partiell differenziert, wobei der außerhalb des Integrals stehende Teil = die Werte auf dem Rand - stets wegfiel, weil es keinen Rand gab. Das ist jetzt anders. Um diesen Effekt dennoch zu erreichen, müssen Ausdrücke mit einer solchen Ableitung verwendet werden, daß Werte auf dem Rand verschwinden. Die mathematisch einfachste Orthogonalfunktion erhält man, wenn man für diese Ableitung den Ausdruck

$$\sqrt{1-x^2} \frac{dg(x)}{dx} \quad (117)$$

wählt, der an den Randpunkten  $x = -1$  und  $x=1$  verschwindet. Man erhält durch Mittelung des Quadrats dieses Ausdrucks

$$w^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2) |g'(x)|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2) g'(x) g'^*(x) dx = ||\sqrt{1-x^2} \frac{dg}{dx}||; \quad (118)$$

partielle Integration liefert jetzt

$$w^2 = \frac{1}{2} \left[ (1-x^2) g'(x) g'^*(x) \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dg(x)}{dx} \right\} g'^*(x) dx. \quad (119)$$

Der erste Summand rechts fällt - wie gewünscht - weg und man erhält

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \{ -\{(1-x^2)g'(x)\}' \cdot g^*(x) \} dx = w^2. \quad (120)$$

Für den Eigenwertoperator  $D = A \in \mathcal{M}$  nimmt man

$$D = - \frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d}{dx} \right) = -(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx}. \quad (121)$$

Der Definitionsbereich  $\mathcal{L}$  von  $D$  umfaßt jetzt wegen Formel (118) alle  $g \in \mathcal{H}$ , für die die Ausdrücke auf der rechten Seite von (118) existieren und einen endlichen Wert haben.

Die Eigenwertgleichung

$$Dg = w^2 g \quad (122)$$

mit  $g \in \mathcal{L}$  und dem Differentialoperator (121) ist die Legendresche Differentialgleichung.

Die Eigenwerte sind  $w^2 = n(n+1)$  für  $n = 0, 1, 2, \dots$

und die Eigenfunktionen sind die Legendre'schen Polynome

$$g(x) = P_n(x) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{ |x^2-1|^n \} \quad (123),$$

die in dieser Definition bereits als normiert angesetzt wurden.

Zu jedem Eigenwert gibt es hier genau eine Eigenfunktion. Damit sind die Eigenfunktionen bis auf einen eventuellen Faktor eindeutig festgelegt.

Ist  $f(x)$ ,  $x \in [-1, 1]$  eine beliebige quadratisch-Lebesgue-integrable Funktion - für die also die Bedingung (115) erfüllt ist -, so läßt sich  $f(x)$  durch folgende Reihe darstellen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x). \quad (124)$$

Dabei kann man den Koeffizienten  $c_n \in \mathcal{L}$  mit Hilfe der Formel

$$c_n = (f, P_n) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \quad (125)$$

berechnen.

Diese Koeffizienten müssen mit wachsendem  $n$  gemäß der Besselschen Ungleichung (56) eine Nullfolge bilden. Ihr Wert ist ein Maß für die Amplitude und das Vorzeichen der Einzelwelle bei  $x = 1$ . Die Amplitude der Einzelwelle hängt jedoch auch von der Stelle  $|x|$  ab, an der diese Amplitude auftritt. Die größte Amplitude haben stets die Randwerte. Die Amplituden (= relativen Extrema) nehmen zur Mitte ( $x = 0$ ) hin monoton ab. Die mit  $\sqrt{1-x^2}$  multiplizierten Amplituden (= relativen Extrema) nehmen für  $n \geq 2$  zur Mitte ( $x = 0$ ) hin monoton zu. Es gelten die Abschätzungen

$$\frac{|\cos(2n+1)\phi|}{\cos \phi} \leq |P_n(-\sin \phi)|^2 \leq (2n+1) \min \left( 1, \frac{2}{n \pi \cos^2 \phi} \right),$$

siehe MAGNUS u.a. (1966), S. 237!

Die Nullstellen einer Orthogonalfunktion liegen in der Mitte ( $x=0$ ) dichter beieinander als am Rand. Alle  $n$  Nullstellen liegen jedoch im Intervall  $[-1,1]$ . Man kann daher sagen, daß die Auflösung in der Intervallmitte am stärksten ist, zu den Rändern hin abnimmt und außerhalb des Intervalls  $\mathfrak{J}$  verschwindet. Trotzdem sind die  $P_n(x)$  auch außerhalb von  $\mathfrak{J}$  definiert und überall stetig. Randwerte lassen sich deshalb einwandfrei darstellen.

Die speziellen Eigenschaften der Legendre'schen Polynome, den orthogonalen Funktionen auf einer Strecke und ihre Eigenwerte sind:

1. Der Eigenwert ist gleich dem gewichteten Intervallmittel des Quadrats der Ableitungen der Eigenfunktion. Das Gewicht  $(1-x^2)$  ist im Intervallinnern überall positiv und verschwindet am Rande. Bei konstantem Intervallmittelwert bleibt der Mittelwert über das Quadrat der Ableitung des Gewichts ein Minimum, wenn man es mit anderen geeigneten Gewichten vergleicht.

2. Der Eigenwert ist der Faktor, um den in der Intervallmitte die Krümmung und am Intervallrand die Ableitung der Eigenfunktion größer ist als die Eigenfunktion selbst. Zwischen Intervallmitte und Intervallrand ist eine Linearkombination aus Krümmung und Ableitung der Eigenfunktion proportional zur Eigenfunktion selbst.
3. Der Eigenwert ist Anzahl der Nullstellen mal (Anzahl der Nullstellen plus eins). Dabei sind die Nullstellen der Eigenfunktionen gemeint. Eine Auflösung in dem Sinne, daß man die kleinstmögliche Entfernung zwischen einem Maximum und einem Minimum angibt, die im ganzen Intervall noch aufgelöst werden kann, eine derartige Auflösung läßt sich nicht angeben. Sie hängt von den Stellen  $x \in \mathcal{J}$  ab, die man betrachtet.

Die Teilreihe

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N c_n P_n(x) \quad (126)$$

worin die  $c_n$  durch Formel (125) gegeben sind, kann jedoch maximal  $2N$  Extrema oder maximal  $N$  Nullstellen von  $f(x)$  in  $\mathcal{J}$  wiedergeben. Nur in diesem Sinne kann hier die Auflösung interpretiert werden.

Eine interessante Frage soll noch im Zusammenhang mit den speziellen Eigenschaften der Legendre'schen Polynome diskutiert werden: Warum nimmt man auf dem Intervall

$\mathcal{J} = [-1, 1]$  nicht periodische Funktionen?

Diese müssen jedoch zwei Randbedingungen erfüllen, damit sie neben der Differentialgleichung zweiter Ordnung, Formel (65), eindeutige Lösungen ergeben und orthogonal zueinander sind (vergleiche Formel 66). Trotzdem kann man mit den Funktionen  $e^{i\pi n x}$  genau die gleichen Funktionen  $f(x)$  durch die Reihe

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi m x} \quad (127)$$

darstellen, wie durch die Reihe (124). Betrachtet man jedoch Funktionen, deren Werte sich in der Nähe der Ränder stark unterscheiden  $f(-1) \neq f(1)$ , so wird man mit den Teilreihen (126) viel schneller eine gute Approximation

erhalten als mit der aus (127) abgeleiteten Teilreihe. Außerdem ist die Bevorzugung der Periode über das ganze Intervall  $\mathfrak{J}$  durch die Darstellung (127) im allgemeinen nicht gerechtfertigt. Übrigens wissen wir, daß nicht nur die Funktionswerte selbst bei der Darstellung (127) diese spezielle Periode haben, sondern auch ihre erste Ableitung. Dadurch werden auch Funktionswerte, deren Ableitungen in Randnähe wesentlich verschieden sind, durch die Reihe (127) schlecht approximiert. Da beide Orthogonalsysteme im gleichen Hilbertraum  $\mathfrak{H}$  vollständig sind, muß jede Orthogonalfunktion der einen Familie durch diejenigen der anderen Familie dargestellt werden können:

$$P_n(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} i^n \frac{2n+1}{m} J_{n+\frac{1}{2}}(2\pi m) e^{-2\pi i m x} \quad (128)$$

$$e^{2\pi i m x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} i^n \frac{2n+1}{m} J_{n+\frac{1}{2}}(2\pi m) P_n(x). \quad (129)$$

Darin werden die Besselfunktionen von halbzahliger Ordnung durch

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^n \left(\frac{1}{2}\pi z\right)^{-\frac{1}{2}} z^{n+1} \left(\frac{d}{zdz}\right)^n \frac{\sin z}{z}$$

definiert. Die Formeln (128/129) findet man bei MAGNUS u.a. (1966), S. 133 und S. 108. Weitere Literatur zu diesem Abschnitt findet man bei ABRAMOWITZ u.a. (1965) und LENSE (1954). Soviel über die Orthogonalfunktionen auf einer Strecke.

### 3.5. Orthogonalfunktionen auf einem ebenen Rechteck - das Produkt von zwei Legendreschen Polynomen -

Jetzt sollen Funktionen  $f(x,y)$  nach mathematischen Orthogonalfunktionen  $g_{n,m}(x,y)$  entwickelt werden, die auf einem ebenen Rechteck  $\mathcal{V}$  mit den Seiten  $2X$  und  $2Y$  definiert sind, also  $\mathcal{V} = \{x,y \mid |x| \leq X, |y| \leq Y\}$ .

Der Raum  $\mathcal{H}$  besteht aus allen  $f(x,y)$  mit  $(x,y) \in \mathcal{V}$  und

$$\frac{1}{4XY} \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y |f(x,y)|^2 dy dx < +\infty, \quad (130)$$

Das innere Produkt für  $f, g \in \mathcal{H}$  werde definiert durch

$$(f,g) = \frac{1}{4XY} \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y f(x,y) g^*(x,y) dy dx. \quad (131)$$

Die Norm  $||f||$  wird in  $\mathcal{H}$  durch

$$||f|| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{XY} \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y |f(x,y)|^2 dy dx} \quad (132)$$

gegeben.

Nach dem bislang angewandten Verfahren zur Ermittlung der mathematischen Orthogonalfunktionen ist nun ein geeigneter Differentialquotient nach der Ortsvariablen zu bilden. Da die Ortsvariable zweidimensional ist, erhält man einen vektoriellen Differentialquotienten, üblicherweise wird dafür der Gradient, mit den Komponenten  $\frac{\partial}{\partial x}$  und  $\frac{\partial}{\partial y}$  genommen.

Aus der Bearbeitung der Orthogonalfunktionen auf einer Strecke wissen wir jedoch, daß dieser Differentialausdruck auf dem Rand, genauer die Komponente senkrecht zum Rand, verschwinden muß. Analog wie dort wird man deshalb für diesen Differentialausdruck einen vektoriellen Operator mit den Komponenten

$$\frac{\sqrt{X^2 - x^2}}{X} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{Y^2 - y^2}}{Y} \frac{\partial}{\partial y}$$

wählen, dessen Vektoren senkrecht zum Rand auf dem Rand verschwinden. Sind  $\vec{i}$  bzw.  $\vec{j}$  die Einsvektoren in x- bzw. y-Richtung, so wird eine Funktion  $g \in \mathcal{L} \subset \mathcal{H}$  durch

$$\vec{v} = \frac{\sqrt{X^2-x^2}}{X} \frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} + \frac{\sqrt{Y^2-y^2}}{Y} \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} \quad (133)$$

in einen vektorwertigen Hilbertraum  $\mathcal{H}^2$  abgebildet.

$\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$  besteht aus allen  $g \in \mathcal{H}$ , für die der Ausdruck

$$\begin{aligned} ||\vec{v}||^2 &= \frac{1}{4XY} \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y \vec{v} \cdot \vec{v}^* dy dx = \\ &= \frac{1}{4XY} \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y \left\{ \frac{(X^2-x^2)}{X^2} \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right|^2 + \frac{(Y^2-y^2)}{Y^2} \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right|^2 \right\} dy dx = w^2 \end{aligned} \quad (134)$$

existiert. Man erkennt, daß  $w^2$  ein Maß dafür ist, wie glatt die Funktion  $g(x,y)$  für  $(x,y) \in \mathcal{D}$  ist.

Die partielle Integration des Integrals in (134) liefert:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4XY} \int_{-Y}^Y \left[ \frac{X^2-x^2}{X^2} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} g^*(x,y) \right]_{x=-X}^{x=X} dy + \\ &+ \frac{1}{4XY} \int_{-X}^X \left[ \frac{Y^2-y^2}{Y^2} \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} g^*(x,y) \right]_{y=-Y}^{y=Y} dx - \\ &- \frac{1}{4XY} \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{X^2-x^2}{X^2} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{Y^2-y^2}{Y^2} \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \right] \right\} g^*(x,y) dy dx = w^2. \end{aligned} \quad (135)$$

Die beiden ersten Summanden auf der linken Seite von (135) fallen - wie gewünscht - weg und für den gesuchten Eigenwertoperator  $A = D$  erhält man die Eigenwertgleichung

$$Dg(x,y) = - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{X^2-x^2}{X^2} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{Y^2-y^2}{Y^2} \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \right] = w^2 g(x,y) \quad (136)$$

mit der Lösung

$$g(x,y) = P_n\left(\frac{x}{X}\right) \cdot P_m\left(\frac{y}{Y}\right) \quad (137)$$



und dem zugehörigen Eigenwert

$$w^2 = \frac{n(n+1)}{X^2} + \frac{m(m+1)}{Y^2} \quad (138)$$

für  $n=m=0$ ;  $n,m=1,2,\dots$

Zu jedem Eigenwert gibt es genau eine Eigenfunktion.

Ist  $f(x,y)$  eine in dem Rechteck  $-X \leq x \leq X, -Y \leq y \leq Y$  quadratisch Lebesgue-integrable Funktion, für die also die Bedingung (130) gilt, so läßt sich  $f(x,y)$  in die folgende Reihe entwickeln

$$f(x,y) = c_{0,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{n,m} P_n\left(\frac{x}{X}\right) \cdot P_m\left(\frac{y}{Y}\right). \quad (139)$$

Dabei lassen sich die Koeffizienten  $c_{n,m} \in \mathbb{R}$  mit Hilfe der Formel

$$c_{n,m} = (f, P_n \cdot P_m) = \frac{1}{4XY} \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y f(x,y) P_n\left(\frac{x}{X}\right) P_m\left(\frac{y}{Y}\right) dy \, dx \quad (140)$$

aus  $f(x,y)$  berechnen.

Die speziellen Eigenschaften der doppelten Legendre'schen Polynome, den Orthogonalfunktionen auf einem Rechteck und ihrer Eigenwerte sind:

1. Der Eigenwert ist gleich dem Flächenmittelwert der Summe der gewichteten Quadrate der Ableitungen der zugehörigen Eigenfunktionen nach den beiden Ortskoordinaten  $x$  und  $y$ . Die Gewichte  $(X^2-x^2)/X^2$  und  $(Y^2-y^2)/Y^2$  haben in der Mitte des betrachteten Rechtecks den Wert 1, sie sind im Innern überall positiv und verschwinden bei den beiden Randwerten der Koordinaten. Der positive Ausdruck, über den zur Ermittlung des Eigenwerts gemittelt wird, geht in der Mitte des Definitionsgebietes in das Skalarproduktquadrat des Gradienten der Eigenfunktion über, das zur Berechnung der Eigenwerte auf der Kugeloberfläche verwendet wurde.

2. Der Eigenwert ist der Faktor, um den im Mittelpunkt des Definitionsintervalls die Krümmung und an den Ecken des Rechtecks der durch die Rechteckfläche dividierte Gradient der Eigenfunktion senkrecht zur Diagonalen größer ist als die Eigenfunktion selbst. In dem übrigen Definitionsgebiet ist eine Linearkombination aus diesen Größen proportional zur Eigenfunktion selbst. Die Gewichte dieser Krümmungs- und Ableitungsgrößen des Eigenwertes sind in beiden Koordinaten höchstens quadratisch, für die Ableitung sogar linear.
3. Der Eigenwert besteht aus zwei Summanden, die sich auf die beiden Koordinaten beziehen. Für den Summanden gilt Anzahl der Nullstellen mal (Anzahl der Nullstellen + 1) dividiert durch die halbe Intervalllänge der betreffenden Koordinate. Unter Nullstellen werden die Nullstellen der Eigenfunktion als Funktion der betreffenden Koordinate verstanden.  
Eine Auflösung in dem Sinne, daß man die kleinst-mögliche Entfernung zwischen einem Maximum und einem Minimum angibt, die im ganzen Rechteck noch aufgelöst werden kann, eine derartige Auflösung läßt sich nicht angeben. Sie hängt von der Stelle  $(x,y) \in \mathcal{V}$  ab, die man betrachtet.

Die Teilreihe

$$f_{N,M}(x,y) = c_{00} + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{nm} P_n\left(\frac{x}{X}\right) P_m\left(\frac{y}{Y}\right) \quad (141)$$

$$\text{mit } w_{N,M}^2 = \max_{\substack{n \leq N \\ m \leq M}} w_{n,m}^2 = \min_{\substack{n \geq N \\ m \geq M}} w_{n,m}^2 \quad (142)$$

worin die  $c_{nm}$  durch Formel (140) und die Eigenwerte  $w_{n,m}$  durch Formel (138) gegeben sind, kann maximal  $4NM$  Extrema oder maximal  $NM$  Nullstellen von  $f(x,y)$  in  $\mathcal{V}$  wiedergeben. Dabei spielt das Seitenverhältnis des Rechtecks  $\mathcal{V}$  eine Rolle für das Verhältnis der Auflösung in den beiden

Koordinatenrichtungen. Dabei ergibt es sich, daß der mittlere Abstand zwischen zwei noch auflösbaren Nullstellen in beiden Koordinatenrichtungen nahezu gleich groß ist. In der dazwischenliegenden Richtung nimmt der Abstand zwischen zwei noch auflösbaren Nullstellen bis auf einen maximal  $\sqrt{2}$ -fach größeren Wert zu.

Läßt man in der Formel (133) die Nenner  $X$  bzw.  $Y$  und in den Formeln (134, 135, 138) die Nenner  $X^2$  bzw.  $Y^2$  weg, so wird die Auflösung so sein, daß die Anzahl der Nullstellen in den Definitionsgebieten der beiden Koordinatenachsen gleichgroß wird. Der mittlere Abstand zwischen zwei Nullstellen ist dann proportional zu der betreffenden Seitenlänge  $2X$  bzw.  $2Y$  des Definitionsgebiets  $\mathfrak{D}$ . Auch eine derartige Art der Auflösung kann manchmal sinnvoll sein.

Vektorwertige Funktionen auf einem ebenen Rechteck lassen sich stetig und eindeutig durch ihre beiden Komponenten darstellen, die auch beide einen Hilbertraum darstellen. Deshalb läßt sich der Hilbertraum von vektorwertigen Funktionen auf einem ebenen Rechteck ohne weiteres auf skalare Funktionen auf einem ebenen Rechteck zurückführen, die in diesem Unterabschnitt untersucht wurden. Vergleiche dazu KIRK (1977)!

#### 4. DIE NATÜRLICHEN ORTHOGONALFUNKTIONEN UND IHRE EIGENSCHAFTEN

Jetzt werde der Fall betrachtet, daß man statistische Kenntnisse über die Meßwertfunktion  $f \in \mathcal{H}$  besitzt. Für den Hilbertraum  $\mathcal{H}$  werden keine speziellen Voraussetzungen gefordert. Das Definitionsgebiet  $\mathcal{G}$  von  $f(x)$  sei eine beliebige meßbare Punktmenge von endlichem Maß  $m(\mathcal{G})$ . Also

$$m(\mathcal{G}) = \int_{\mathcal{G}} dx. \quad (143)$$

Im allgemeinsten Fall stellt das Integral ein Lebesgue-Stieltje Integral dar, dann kann man bei einer diskreten Punktmenge  $\mathcal{G}$  das Integral in eine Summe umwandeln. Doch genügt es, überall den Lebesgue'schen Integralbegriff zu verwenden, mit dem Riemannschen Integralbegriff würde man - bis auf die weiter oben angegebene Vollständigkeit - auch keine Schwierigkeiten erhalten. Das innere Produkt  $(f, g)$  für  $f, g \in \mathcal{H}$  werde wie üblich definiert

$$(f, g) = \frac{1}{m(\mathcal{G})} \int_{\mathcal{G}} f(x) \cdot g^*(x) dx. \quad (144)$$

Der Wertevorrat  $\mathcal{W} = \{f(x), g(x)\}$  kann dabei auch aus Vektorfunktionen bestehen, die sogar eine endliche Anzahl von Dimensionen haben können. Dann weist der Punkt unter dem Integralzeichen in Formel (144) auf ein örtliches skalares Produkt dieser Vektoren hin. In der Anwendung wird sich zeigen, daß die einzelnen Komponenten dieser Vektoren sogar verschiedene physikalische Werte darstellen können, für die jedoch bei der Bildung des skalaren Produkts  $f(x) \cdot g(x)$  die Angabe einer vergleichbaren physikalischen Dimension erforderlich ist. Für das skalare Produkt ist es zweckmäßig, eine Energieeinheit zu nehmen;  $f(x)$  selbst muß dann die physikalische Dimension der Wurzel aus der Energie haben. Für alle  $f \in \mathcal{H}$  muß die räumliche gemittelte Energie endlich bleiben:

$$||f||^2 = (f, f) = \frac{1}{m(\mathfrak{S})} \int_{\mathfrak{S}} |f(x)|^2 dx < + \infty. \quad (145)$$

Wegen der statistischen Kenntnisse wollen wir zunächst die aktuellen Meßwerte  $f(x, t) \in \mathfrak{M}$  als bekannt voraussehen. Dabei ist  $t$  ein statistischer Parameter, bei dem man an die Zeit denken kann. Unsere statistischen Größen selbst sollen nicht mehr von  $t$  abhängen. Dies ist eine Forderung, deren Gültigkeit in jedem einzelnen Anwendungsfall mit statistischen Methoden überprüft werden muß. Das soll hier nicht geschehen. Sei nun  $f(x, t)$  im Intervall  $t_1 \leq t \leq t_2$  gegeben. Dann ist der Mittelwert

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(x, t) dt$$

eine statistische Größe. Da er nicht von dem Parameter  $t$  abhängen soll, darf der obige Ausdruck auch nicht von  $t_1$  und  $t_2$  abhängen. Deshalb wird der statistische Mittelwert in Zukunft durch einen Querstrich dargestellt

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(x, t) dt = \overline{f(x)} \quad (146)$$

Wenn man ganz korrekt die Abhängigkeit von  $t_1$  und  $t_2$  ausschalten will, so muß man ein unendliches Intervall  $T = t_2 - t_1$  wählen, also

$$\overline{f(x)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_T f(x, t) dt \right\}$$

doch wird man in der Praxis Formel (146) verwenden. Als  $K$ -te Approximation von  $f(x, t)$  werde die Teilreihe

$$f_K(x, t) = \overline{f(x)} + \sum_{k=1}^K c_k(t) g_k(x) \quad (147)$$

angesetzt. Dabei hängt  $c_k(t) \in \mathfrak{L}$  nur von  $t$  aber nicht

von  $x \in \mathcal{V}$  und der zweite Faktor  $g_k(x) \in \mathcal{W}$  hängt zwar von der Ortskoordinate  $x \in \mathcal{V}$  aber nicht von  $t$  ab.

Bei jeder Erhöhung des Approximationsgrades  $K$  um eins, sollen die Glieder mit  $k < K$  stets ungeändert bleiben. Das neue Glied mit dem Index  $K$  soll so gewählt werden, daß das Fehlerquadrat  $|f_K(x,t) - f(x,t)|^2$  nach der Mittelung über  $\mathcal{V}$  im statistischen Mittel ein Minimum wird. In Formeln:

$$v_K^2 = \overline{|f_K - f|^2} = \overline{|f_K - f|^2} = \frac{1}{m(\mathcal{V})} \int_{\mathcal{V}} (f(x) - f_K(x))(f(x) - f_K(x))^* dx = \text{Minimum.} \quad (148)$$

Dann konvergiert  $f_K(x,t)$  nach der Norm in  $\mathcal{V}$  im statistischen Mittel optimal gegen  $f(x,t)$ :

$$f(x,t) = \overline{f(x)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) g_k(x) \quad (149)$$

Ein Faktor jedes Summanden in der Summe von (147) bzw. (149) kann mit einer Konstanten  $\neq 0$  multipliziert werden, wenn der andere durch diese Konstante dividiert wird. Diese Willkür kann man durch die Normierung einer der beiden Faktoren beseitigen. Anders als bei den mathematischen Orthogonalfunktionen soll hier nicht  $g_k$  auf 1 normiert werden, sondern die  $c_k$  werden statistisch auf 1 normiert.

$$\overline{|c_k|^2} = 1 \quad (150)$$

Dann haben die  $g_k(x)$  die gleiche physikalische Dimension und im statistischen Mittel die gleiche anteilmäßige Größenordnung wie die Meßwerte  $f(x,t)$  selbst. Im einzelnen bleiben die  $c_k(t)$  noch um einen Faktor  $\pm 1$  bzw. im komplexen Fall um  $e^{i\alpha}$  unbestimmt. Werden in (149) beide Seiten statistisch gemittelt, so erhält man

$$\sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k} g(x) = 0 \text{ und daraus,}$$

wegen der linearen Unabhängigkeit der  $g(x)$

$$\overline{c_k} = 0. \quad (150a)$$

Allein aus den Bedingungen (148) und (150) läßt sich ein Berechnungsverfahren zur Bestimmung sowohl der  $c_k(t) \in \mathcal{L}$

als auch der  $g_k \in \mathcal{H}$  ableiten, wenn die Approximationsfunktionen durch eine Reihe der Form (147) dargestellt werden. Die Orthogonalität der  $g_k$

$$(g_k, g_n) = \begin{cases} w_k^2 & \text{für } k = n \\ 0 & \text{für } k \neq n \end{cases} \quad (151)$$

ergibt sich dabei ebenfalls, sie muß nicht vorausgesetzt werden. Das gleiche gilt für die statistische Unabhängigkeit der  $c_k(t)$ , also ihrer Orthonormalität bezüglich  $t$ :

$$\overline{c_k c_n^*} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = n \\ 0 & \text{für } k \neq n \end{cases} \quad (152)$$

Betrachtet man die  $f(x,t)$  nur als Funktionen von  $x$ , so wurde die Orthogonalität der  $g_k$  bereits früher (Formel 47) abgeleitet. Wie man die  $c_k$  berechnen kann, findet man dort in Formel (45)

$$c_k(t) = \frac{(f'(t), g_k)}{w_k^2} \quad (153)$$

darin stellen die  $f'(x,t)$  die Abweichungen der Meßwerte vom statistischen Mittelwert dar:

$$f'(x,t) = f(x,t) - \overline{f(x)} \quad (154)$$

Daraus folgt wegen der Definition (146) des statistischen Mittelwerts

$$\overline{f'(x)} = 0 \quad \text{für } x \in \mathcal{G}. \quad (155)$$

Ersetzt man in dem Ausdruck (148) für das Fehlerquadrat  $v_K^2$ , das ein Minimum werden soll,  $f$  durch  $f'$  nach der Beziehung (154), analog sei  $f'_K(x,t) = f_K(x,t) - \overline{f(x)}$ .

Es muß gelten

$$\frac{\partial v_K^2}{\partial g_n}(x) = 0 \quad \text{für } n \geq K$$

oder analog zu (25) unter Verwendung von (198), (149), (151) und (154)

$$v_K^2 - v_{K+1}^2 = \overline{c_K c_K^*} w_K^2 - 2 \operatorname{Re} \{ \overline{(c_K g_K, f' - f'_{K+1})} \}$$

$$\frac{\partial}{\partial g_n(x)} \{v_K^2 - v_{K+1}^2\} = -2 \overline{c_K c_n^*} g_K(x) = 0 \text{ für } n > K.$$

Daraus erhält man die Orthogonalität der  $c_K(t)$ , also Formel (152). Multipliziert man die Reihe (149) mit  $c_n^*(t)$  und verwendet (152), so erhält man

$$g_n(x) = \overline{f'(x) c_n^*}. \quad (156)$$

Setzt man das  $c_K(t)$  aus (153) in (156) ein und multipliziert mit  $w_K^2$ , so erhält man bereits die Eigenfunktionsgleichung für die  $g_K(x)$

$$\overline{f'(x) (f', g_K)^*} = w_K^2 g_K(x), \quad (157)$$

wobei die  $w_K^2$  die Eigenwerte sind, und der Eigenwertoperator  $B \in \mathfrak{M}$  für  $h \in \mathfrak{H}$  durch

$$Bh(x) = \overline{f'(x) (f', h)^*} = \frac{1}{m(\mathfrak{J})} \int_{\mathfrak{J}} \left[ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f'(x, t) f'^*(y, t) dt \right] h(y) dy \quad (158)$$

dargestellt wird.

Der Eigenfunktionsoperator  $B$  ist ein Integraloperator

$$B = \frac{1}{m(\mathfrak{J})} \int_{\mathfrak{J}} K(x, y) ( \quad ) dx \quad (159)$$

mit dem Kern

$$K(x, y) = \overline{f'(x) f'^*(y)}. \quad (160)$$

Der Kern ist hermitisch:  $K(x, y) = K(y, x)^*$ , deshalb ist  $B$  auch hermitisch, also selbstadjungiert. Der Kern enthält die statistischen Mittelwerte des Produkts der Abweichung vom Mittelwert an jedem Punkt  $x \in \mathfrak{J}$  mit der Abweichung vom Mittelwert an jedem Punkt  $y \in \mathfrak{J}$  und kann daher auch als Kovarianzfunktion bezeichnet werden. Für  $x = y$  erhält man die Varianzen von  $f(x)$ .

Zunächst soll das Ergebnis des Operators  $B$  abgeschätzt werden. Dazu geht man von der Eigenwertgleichung

$$Bg_K = w_K^2 g_K \quad (160a)$$



mit den Eigenfunktionen  $g_k \in \mathcal{H}$  und den Eigenwerten  $w_k^2 \in \mathbb{R}$  aus. Aus  $f' \in \mathcal{H}$  folgt auch  $f = \bar{f} + f' \in \mathcal{H}$ .  
 $f'$  werden durch die Reihe (149) dargestellt

$$Bf' = \sum_{k=1}^{\infty} c_k Bg_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k^2 g_k$$

letzteres folgt aus der Eigenwertgleichung (160a).  
 Das innere Produkt mit sich selbst auf beiden Seiten liefert unter Berücksichtigung der Orthogonalität der  $g_k$  (Formel 151)

$$||Bf'||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 w_k^6$$

analog für  $f' \in \mathcal{H}$

$$||f'||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 w_k^2$$

Letztere Gleichung mit  $w_1^4$  multipliziert minus vorletzte Gleichung liefert

$$w_1^4 ||f'||^2 - ||Bf'||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 [w_1^4 - w_k^4] w_k^2 \quad (160b)$$

Die Eigenwerte  $w_k^2$  nehmen mit wachsendem  $k$  ab:

$$w_1^2 \geq w_k^2 \geq w_{k+1}^2 \geq \dots \geq 0. \quad (161)$$

Die Eigenwerte häufen sich in der Nähe von 0.

Daher ist die rechte Seite von (160b)  $\geq 0$  und man erhält die Abschätzung

$$||Bf'|| \leq w_1^2 ||f'|| \quad f' \in \mathcal{H}. \quad (162)$$

Somit hat der Integraloperator  $B$  einen Definitionsbereich  $\mathcal{D}$  der ganz  $\mathcal{H}$  ausschöpft:

$$Bh \in \mathcal{H} \quad \text{für alle } h \in \mathcal{H}. \quad (163)$$

Nach diesen Ergebnissen kehren wir noch einmal zu dem Fehler  $v_K$  zurück, den man begeht, wenn man  $f(x,t)$  durch die Teilreihe  $K$ -ter Ordnung  $f_K(x,t)$  approximiert. Für das über den Raum gemittelte Fehlerquadrat erhält man im statistischen Mittel unter Verwendung der Formeln

(148), (149) und (147), (152) und (151)

$$v_K^2 = \overline{||f_K - f||^2} = \sum_{k=K+1}^{\infty} w_k^2. \quad (164)$$

Verwenden wir die über  $\mathfrak{G}$  gemittelte Varianz von  $f(x,t)$

$$v_0^2 = \overline{||f'||^2} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k^2, \quad (165)$$

so erhält man

$$v_K^2 = v_0^2 - \sum_{k=1}^K w_k^2 \quad (166)$$

oder

$$v_K^2 = v_{K-1}^2 - w_K^2. \quad (167)$$

In Worten: Jede Verbesserung der Approximation durch Hinzufügung des Gliedes  $c_K(t) g_K(x)$  zur Teilreihe  $f_{K-1}(x,t)$  bewirkt eine Verringerung des mittleren Fehlerquadrats um den Eigenwert  $w_K^2$ , der zu der hinzugefügten Eigenfunktion  $g_K(x)$  gehört. Das Fehlerquadrat besteht im statistischen Mittel aus allen Eigenwerten, der nicht verwendeten Eigenfunktionen (Formel 164).

Die Wurzel aus der Summe aller Eigenwerte  $v_0$  ist die Streuung der Meßwerte  $f(x,t)$  im räumlichen und im statistischen Mittel (Formel 165).

Das Verhältnis des mittleren Fehlerquadrats  $v_K^2$  zu der Gesamtvarianz  $v_0^2$  ist ein Maß für die Güte der erreichten Approximation

$$v_K^2/v_0^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^K w_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} w_k^2} \quad (168)$$

das zwischen den Werten  $0 \hat{=}$  kein Fehler und  $1 \hat{=}$  größtmöglicher Fehler liegt. Dementsprechend kann man den Ausdruck  $v_K/v_0$  als relativen Approximationsfehler bei der Entwicklung nach natürlichen Orthogonalfunktionen bezeichnen. Je schneller der Ausdruck (168) für  $K \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert, desto vorteilhafter ist die Entwicklung von  $f(x,t)$  nach natürlichen Orthogonalfunk-

tionen, desto mehr Information läßt sich mit wenigen Reihengliedern darstellen. Diese Güte hängt nicht von theoretischen Überlegungen ab, sondern nur von den statistischen Größen der Meßwerte  $f(x,t)$ .

Ein interessanter Zusammenhang zwischen dem Kern  $K(x,y)$  und den Eigenfunktionen  $g_k(x)$  soll noch aufgezeigt werden. Die Bilinearreihe

$$K'(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) g_k^*(y)$$

ist als Funktion von  $x$  und von  $y$  - wegen der Konvergenz der Reihe (165) der Eigenwert - quadratisch Lebesgue-integrierbar.

Die Gleichung

$$\frac{1}{m(\mathcal{Y})} \int_{\mathcal{Y}} K'(x,y) g_k(y) dy = w_k^2 g_k(x)$$

hat daher einen Sinn. Da die Eigenwertgleichung (157) bzw. (160a) unter Verwendung des Kerns  $K(x,y)$  in die lineare Integralgleichung der gleichen Form

$$\frac{1}{m(\mathcal{Y})} \int_{\mathcal{Y}} K(x,y) g_k(y) dy = w_k^2 g_k(x) \quad x \in \mathcal{Y} \quad (169)$$

übergeht, erhält man wegen der Vollständigkeit der  $g_k(x)$  als Darstellung des Kerns

$$K(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) g_k^*(y), \quad x,y \in \mathcal{Y}. \quad (170)$$

Wie lassen sich nun die Eigenwerte  $w_k^2$  und die Eigenfunktionen  $g_k(x)$  berechnen? Zunächst muß die Funktion des statistischen Mittels  $\overline{f(x)}$  und danach die Kovarianzfunktion

$$K(x,y) = \overline{f'(x)f'^*(y)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f'(x,t) f'^*(y,t) dt \quad (170a)$$

mit statistischen Methoden berechnet werden oder anderweitig bekannt sein. Danach ist die lineare Integralgleichung (169) für die Eigenfunktion  $g_k(x)$  und die Eigenwerte  $w_k^2$  zu lösen.

Diese Integralgleichung mit dem Kern der Form (170a) läßt sich stets derart lösen, daß man sowohl die Eigenwerte  $w_k^2$  als auch die Eigenfunktionen mit der Nebenbedingung (151) als Ergebnis erhält. Ein Weg dazu wird etwas weiter unten angegeben. Die Koeffizienten  $c_k(t)$  lassen sich aus Formel (153) berechnen, damit sind alle Glieder der Reihe (149) bekannt. Aus den Eigenwerten  $w_k^2$  lassen sich schließlich die über Raum und Zeit gemittelten Fehlerquadrate  $v_k^2$  gemäß der Formel (164) bis (168) berechnen.

Einen Weg, um die Integralgleichung (170) zu lösen, erhält man, indem man die  $f(t) \in \mathcal{H}$  durch die Entwicklungskoeffizienten nach einem vollständigen Orthonormalsystem  $h_n(x)$  aus  $\mathcal{H}$  darstellt.  $h_n \in \mathcal{H}$  kann zum Beispiel ein geeignetes mathematisches Orthonormalsystem sein mit

$$(h_n, h_m) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases}$$

$$f'(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) h_n(x) \quad (171)$$

mit  $b_n(t) \in \mathcal{L}$ . Die Folgen  $\{b_1(t), b_2(t), \dots\}$  für alle  $t \in [t_1, t_2]$  sind Elemente des sogenannten Hilbertschen Folgenraums  $\mathcal{H}_F$ , falls das übliche skalare Produkt als inneres Produkt verwendet wird, wobei von dem zweiten Faktor der konjugiert-komplexe Wert zu nehmen ist.  $\mathcal{H}_F$  ist isomorph zu  $\mathcal{H}$ . Was dies im einzelnen bedeutet, wird jetzt direkt gezeigt.

Für die Kovarianzfunktion  $K(x, y)$ , den Kern der Integralgleichung (170), erhält man nach seiner Definitionsformel (170a)

$$K(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \overline{b_n b_m^*} h_n(x) h_m^*(x) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{n,m} h_n(x) h_m^*(y) \quad (172)$$

$$\text{mit } a_{nm} = \overline{b_n b_m^*}, \quad (173)$$

$$\text{also } a_{nm} = a_{nm}^*, \quad a_{nm} \in \mathcal{L}.$$

Für die Integralgleichung (170) werden die Eigenfunktionen  $g_k(x)$  formal auch durch die Orthogonalfunktionen  $h_n \in \mathcal{H}$  dargestellt

$$g_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{kn} h_n(x) \quad \text{mit } g_{kn} \in \mathbb{R}, \quad (174)$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Darstellung (170) des Kerns aus den Eigenfunktionen ein und vergleicht das Ergebnis mit der rechten Seite von (172), so erhält man als Analogon zu (170) die Darstellung der Matrixelemente durch die Eigenvektoren

$$g'_k = \begin{pmatrix} g_{k1} \\ g_{k2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (175)$$

mit  $g'_k \in \mathcal{H}_F$

$$a_{nm} = \sum_{k=1}^{\infty} g_{kn} g_{km}^* \quad (176)$$

Berücksichtigt man die sich aus der Normierung (151) der  $g_k(x)$  ergebenden Bedingungen für die  $g'_k$

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_{kn} g_{mn}^* = \begin{cases} w_k^2 & \text{für } k = m \\ 0 & \text{für } k \neq m \end{cases}, \quad (177)$$

so erhält man

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |a_{nm}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} w_k^4. \quad (178)$$

Die Elemente der Matrix A sind quadratisch konvergent.

Setzt man den Wert für  $K(x,y)$  aus (172) und den für  $g_k(x)$  aus (174) in die Integralgleichung (169) ein, so erhält man:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} g_{km} h_n(x) = w_k^2 \sum_{n=1}^{\infty} g_{kn} h_n(x). \quad (179)$$

Daraus folgt wegen der linearen Unabhängigkeit der

$$h_n \in \mathcal{H} \quad \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} g_{km} = w_k^2 g_{kn} \quad (180)$$

$n, m = 1, 2, 3, \dots \quad k = 1, 2, 3, \dots$  mit der Nebenbedingung (177).

Dies stellt ein Eigenwertproblem

$$A g'_k = w_k^2 g'_k \quad k= 1,2,3,\dots \quad (181)$$

der unendlich dimensionalen aber quadratisch konvergenten hermithischen Matrix  $A = (a_{nm})$ , dar mit den Eigenvektoren  $g'_k \in \mathcal{H}_F$  aus (175) und den Eigenwerten  $w_k^2$ . In der Praxis wird man sich auf endlich viele Glieder der Matrix  $A$  beschränken, dann läßt sich das System (181) z.B. mit Hilfe des Jacobi'schen Verfahrens - siehe SPERNER (1957) - nach den  $g_k$  und den  $w_k^2$  auflösen. Die natürlichen Orthogonalfunktionen werden dann durch die Formel (174) gegeben und die Koeffizienten können direkt aus

$$c_k(t) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) g_{kn}}{w_k^2} \quad (182)$$

berechnen werden. Soll der Koeffizient die richtige physikalische Dimension und die richtige Größenordnung wiedergeben, so hat man anstelle von  $c_k(t)$  den Wert  $w_k c_k(t)$  zu nehmen. Die dazugehörige natürliche Orthogonalfunktion ist normiert und wird durch  $g_k(x)/w_k$  gegeben.

Die speziellen Eigenschaften der natürlichen Orthogonalfunktionen und ihrer Eigenwerte, die für ihre Reihenfolge verantwortlich sind, sind folgende:

1. Werden die Abweichungen der Meßwerte vom statistischen Mittel durch eine endliche Reihe approximiert, deren Glieder aus zwei Faktoren bestehen, von denen der eine von dem untersuchten Einzelfall, aber nicht von Ort, der andere nur vom Ort, also nicht vom Einzelfall abhängen, so soll das Fehlerquadrat im statistischen und im räumlichen Mittel minimal sein. Allein aus dieser Bedingung ergibt sich, daß der erste, nicht vom Ort abhängige Faktor, der Koeffizient und der zweite, nicht vom Einzelfall abhängige Faktor, die natürliche Orthogonalfunktion sind. Die Orthogonalität braucht dabei nicht vorausgesetzt zu werden.

2. Die Koeffizienten sind auch orthogonal, wenn man sie als Funktion ihres statistischen Parameters betrachtet. Sie sind also statistisch voneinander unabhängig, auch unkorreliert genannt.
3. Der Eigenwertoperator ist ein Integraloperator, dessen Kern aus der Kovarianzfunktion aller Abweichungen der Meßwerte vom statistischen Mittelwert besteht. In ihn geht also der statistische Zusammenhang der Meßwerte an einem festen Ort mit den Meßwerten an jedem anderen Ort ein. Dieser Zusammenhang ist auch in den natürlichen Orthogonalfunktionen enthalten. Die Reihenfolge, in der die einzelnen Meßwerte auftreten, spielt weder für den Eigenwertoperator noch für die natürlichen Orthogonalfunktion und ihre Eigenwerte eine Rolle, dagegen, wird sich diese Reihenfolge in der Veränderung der Koeffizienten widerspiegeln.
4. Die Eigenwerte stellen die Varianz des betreffenden Reihengliedes im räumlichen Mittel dar. Oder anders ausgedrückt, die Wurzel aus dem Eigenwert ist die mittlere Streuung des zugehörigen Reihengliedes, das aus dem Produkt von natürlicher Orthogonalfunktion und ihrem Koeffizienten besteht. Die Eigenwerte nehmen dementsprechend mit wachsendem Index ab.
5. Das statistisch und über den Raum gemittelte Fehlerquadrat besteht aus der Summe aller derjenigen Eigenwerte, deren zugehörigen Reihenglieder nicht zur Approximation herangezogen wurden. Der mittlere absolute Approximationsfehler ist die Wurzel aus diesem Wert.
6. Die Wurzel aus der Summe aller Eigenwerte ist gleich der mittleren Streuung der betrachteten Meßwerte, die Mittelbildung erfolgt dabei sowohl über das Definitionsgebiet, als auch statistisch; also im Normalfall über Raum und Zeit.

Diese mittlere Streuung ermöglicht es, einen mittleren relativen Approximationsfehler aus dem Quotienten des mittleren Approximationsfehlers und der mittleren Streuung zu bilden. Sein Wert liegt zwischen null und eins.

Weitere Literatur dazu vor allem bei LORENZ (1959).

## 5. SPEZIELLE ANWENDUNGEN

### 5.1. *Die Anwendung von Fourierreihen in der Meteorologie*

Die Darstellung durch Fourierreihen (Abschnitt 3.1.) kommt bei Vorgängen mit einer festen Periode infrage. Diese kann zeitlich sein wie z.B. der Jahresgang oder der Tagesgang eines meteorologischen Meßwertes oder räumlich sein wie vor allem bei den Meßwerten auf einem Breitenkreis. Die numerische Entwicklung in eine Fourierreihe wird auch Harmonische Analyse genannt. Eine Beschreibung des Verfahrens findet man z.B. bei LINKE (1970) Bd. II, S. 177 ff. Für die Harmonische Analyse von komplexen Fourierreihen haben COOLEY und TUKEY (1965) einen Computer Algorithmus angegeben. Weitere Beispiele der Anwendung der Fourierreihen in der Meteorologie findet man bei PFLUGBEIL (1967), PAULIN (1968), DELAND (1968), SOONG u.a. (1969), KAO u.a. (1970), SALTZMAN (1970), NITTA (1970), BATES (1970), KAO (1970), RAO u.a. (1971), WALLACE (1971), WIIN-NIELSEN (1971), FISCHER (1972), GAVRILIN (1972), DELAND (1972), van LOON u.a. (1973), SPETH (1974), BOYD (1976).

### 5.2. *Die Darstellung meteorologischer Skalarfelder durch Kugelflächenfunktionen*

Skalarfelder, wie z.B. Temperatur und Luftdruck, auf der Kugeloberfläche, lassen sich am besten durch Reihen von Kugelflächenfunktionen (Abschnitt 3.2.) gut darstellen. Wie man bei der Berechnung numerisch vorgehen kann, findet man auch bei LINKE (1970) Bd. II, S. 193 ff. Hat man



empirische Werte an den äquidistanten Schnittstellen von Längen und Breitengraden gegeben, so kann man für die Zahlen  $c_1$ , die nach Linke aus dem linearen Gleichungssystem (38.13) berechnet werden sollen, direkt Lösungen angeben. Dies läuft auf die Berechnung der  $c_n^m$  nach Formel (95) hinaus, wobei jedoch die Integrale durch Summen zu ersetzen sind. Ist  $f(\phi, \lambda)$  an den Schnittpunkten der äquidistanten Stellen mit dem Abstand  $\Delta\phi$   $\phi_{-L}, \dots, \phi_1, \dots, \phi_L$  zwischen Süd- und Nordpol einerseits und den  $2L$  äquidistanten Stellen  $\lambda_0, \dots, \lambda_{2L-1}$  andererseits gegeben, so kann man den Kugelflächenfunktionskoeffizienten  $c_n^m$  analog zu Formel (95) berechnen aus:

$$c_n^m = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=-L}^L \sum_{j=0}^{2L-1} f(\phi_l, \lambda_j) e^{im\lambda_j} \Delta\lambda P_n^m(\sin \phi_l) \Delta z_l \quad (183)$$

$$\text{mit } \Delta\lambda = \frac{\pi}{L}, \Delta z_l = \frac{2\Delta\phi}{\pi} n_1 \sum_{\kappa=-L}^L \frac{\eta_\kappa \cos \kappa(2l\Delta\phi + \pi)}{1 - 4\kappa^2} \quad (184)$$

$$\text{darin steht } n_1 \text{ für } n_1 = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } 2|l|\Delta\phi = \pi \\ 1 & \text{für } 2|l|\Delta\phi < \pi \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Meßwerte in Polnähe,} \\ \text{keine Meßwerte an den} \\ \text{Polen vorhanden} \end{array} \right.$$

Alle Felder bis zur Wellenzahl  $n \leq L$  werden durch dieses Verfahren korrekt wiedergegeben.

Über das Rechnen mit Reihen von Kugelflächenfunktionen und über deren Anwendung in der Meteorologie gibt es eine umfangreiche Literatur, wie die folgende Auswahl zeigt:

PREY (1922), SILBERMAN (1954), AWADE u.a. (1957), PLATZMAN (1960), ROBERT (1965), ELIASSEN u.a. (1965), ELLSAESSER (1966), EFIMOV (1969), ELIASSEN u.a. (1969), ORSZAG (1970), WIIN-NIELSEN (1972), ROCHAS (1973), BOURKE (1974), MASHKORICH u.a. (1974), BURROWS (1976).

### 5.3. Die Darstellung von horizontalen Vektorfeldern auf der Kugeloberfläche durch orthogonale Vektorfunktionen

Ganz anders verhält es sich mit den orthogonalen Vektorfunktionen auf der Kugeloberfläche, über die bisher nur sehr wenig veröffentlicht wurde. Wer sich eingehender darüber informieren will, sollte die Arbeit von FECHNER (1973) lesen, dort ist auch ein Beispiel für die Berechnung eines hemisphärischen Windfeldes aus dem Geopotential, geostrophisch unter Berücksichtigung einer Bodenreibung, angegeben worden, daß vom Verfasser erfolgreich durchgerechnet wurde. Der lineare Bodenreibungsansatz ist erforderlich, da am Äquator der geostrophische Ansatz allein den Druckgradienten nicht balancieren kann. In Formeln

$$\vec{V}(\phi, \lambda) = \{-K \text{ grad } \phi(\phi, \lambda) + f(\phi) \times \text{grad } \phi(\phi, \lambda)\} / (K^2 + f^2(\phi))$$

Darin bedeutet  $f(\phi)$  den Coriolisparameter als Funktion der geographischen Breite,  $K$  ist eine Bodenreibungskonstante, sie erhielt den Wert von  $f$  für  $5^\circ\text{N}$ ,  $\phi(\phi, \lambda)$  ist ein mittleres Geopotentialfeld in 500 mb der Nordhalbkugel, die Südhalbkugel enthält am Äquator gespiegelte Werte.  $\vec{V}(\phi, \lambda)$  stellt das zu berechnende Horizontalwindfeld dar. Das  $\times$  Zeichen ist der Kreuzproduktoperator.

Die Ausdrücke  $\phi(\phi, \lambda)$ ,  $f(\phi)$ ,  $f^2(\phi)$ ,  $K$ ,  $K^2$  und der Inhalt der runden Klammern wurden als Elemente von  $\mathcal{H}$  durch Kugelflächenfunktionskoeffizienten, der Ausdruck in der geschweiften Klammer und  $\vec{V}(\phi, \lambda)$  wurden als Elementen von  $\mathcal{H}^2$  durch Koeffizienten der orthogonalen Vektorfunktionen dargestellt. In der Rechnung wurde dementsprechend nirgends von der Gitterpunktdarstellung Gebrauch gemacht. Das Ergebnis einer derartigen Rechnung findet man in der Arbeit von FECHNER (1975).

Weitere Information dazu bei EFIMOV (1969) und SPETH (1974).

#### 5.4. Die Anwendung Legendre'scher Polynome zur Darstellung vertikaler Temperaturverteilungen

Bei meteorologischen Untersuchungen der freien Atmosphäre wird häufig der Luftdruck als vertikale Koordinate verwendet. Bei wissenschaftlichen Untersuchungen von energetischen Umsetzungen ist dies vor allem auch deshalb zweckmäßig, weil die Energiekapazitäten - von der Strahlung abgesehen - der Luftmasse proportional sind.

Betrachtet man jetzt beispielsweise die sensible Wärme oder an ihrer Stelle einfacher die Temperatur  $T$  als Funktion des Luftdrucks  $p$ , so ist diese Temperatur auf der Strecke  $p_0 \geq p \geq 0$  definiert; darin ist  $p_0$  der Bodenluftdruck.

Durch die lineare Transformtion  $x = \frac{p_0 - 2p}{p_0}$  erhält man für die Variable  $f(x) = T(p)$  einen

Definitionsbereich zwischen  $-1$  und  $+1$ . Damit läßt sich diese Funktion durch eine endliche Reihe von Legendre'schen Polynomen mit beliebiger Genauigkeit annähern. Liegen die Meßwerte an äquidistanten Stellen vor, so kann man zur Berechnung der Koeffizienten  $c_n$  in der Reihe (124) nach Formel (125) verfahren und darin das Integral durch ein geeignetes numerisches Integrationsverfahren, wie z.B. das Trapezverfahren, ersetzen.

Liegen die Meßwerte an nicht-äquidistanten Stellen vor und ist ihre Anzahl nicht zu groß, so macht man für die Meßwerte einen formalen Ansatz mit einer Teilreihe der Legendre'schen Polynome mit zunächst unbekannten Koeffizienten  $c_n$  und bestimmt diese dann aus den Meßwerten nach der Methode der kleinsten Quadrate. Diese Methode wird auch im nächsten Unterabschnitt angewandt und dort genauer beschrieben.

### 5.5. Die Analyse des Luftdrucks und anderer Größen in einem rechteckigen Gebiet mit Hilfe von doppelten Legendreschen Polynomen

Dabei ging es um die Aufgabe das Bodenluftdruckfeld, das Feld der Bodenlufttemperatur und das Bodenwindfeld für ein quadratisches Gebiet der Kieler Bucht stetig darzustellen. Als Meßwerte lagen Stationsmessungen an ungleichmäßig verteilten Stationen vor, die teils innerhalb, teilweise jedoch auch außerhalb des betrachteten Rechtecks lagen. Diese Berechnungen wurden von KIRK (1977) im Rahmen seiner Diplomarbeit am Institut durchgeführt. Die Felder wurden formal durch die Teilreihen (141) dargestellt. Lagen die Meßwerte an den Stellen mit den Koordinaten  $(x_i, y_i)$ , so wurde mit diesen Punkten als Eckpunkten eine derartige schlichte Einteilung in Dreiecke vorgenommen, daß der Umkreisradius jedes Dreiecks möglichst klein blieb. Die entstehenden Dreiecke wurden dadurch einem gleichseitigen Dreieck so ähnlich wie möglich. Jeder Meßstation wurde nun ein Drittel der Summe aus den umliegenden Dreiecksflächen als Gewicht  $\beta_i$  zugewiesen, soweit diese Fläche zu dem betrachteten Quadrat gehörte.

Die Meßstationen mußten dabei so verteilt sein, daß alle Teile des zu untersuchenden Quadrats von einem derartigen Dreieck überdeckt wurden. Um dies zu erreichen, mußten gegebenenfalls zusätzliche Werte aus größerskaligen Analysen, z.B. des Deutschen Wetterdienstes, mitverwendet werden.

Die Koeffizienten  $c_{nm}$  der Reihe (141) wurden dann nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den Meßwerten  $f_i$  an den Stellen  $x_i, y_i$  unter Verwendung der Gewichte  $\beta_i$  berechnet. Das heißt, die  $c_{n,m}$  wurden so bestimmt, daß der Ausdruck

$$\sum_i (f_{NN}(x_i, y_i) - f_i)^2 \beta_i$$

ein Minimum wird. Die Summation erstreckt sich über alle Meßstationen.

Für  $f_{NN}(x,y)$  ist die Reihe (141) einzusetzen. Diese Reihe hat  $(N+1)^2$  Glieder, also die gleiche Anzahl von Koeffizienten. Eine sinnvolle Lösung dieser Aufgabe ist nur möglich, wenn die Zahl der Koeffizienten mindestens so groß ist. Liegen zwei Meßstationen sehr dicht beieinander, so ist ihr gemeinsamer Beitrag für die maximale Auflösung nur wenig größer als der von einer der beiden Stationen. Die größtmögliche Auflösung hängt also auch von der räumlichen Verteilung der Stationen ab. Genauere Überlegungen zeigen, daß es nur sinnvoll ist, so viele Glieder der Reihe zu bestimmen, daß ihre Anzahl kleiner als der Ausdruck

$$(\sum_i s_i)^2 / \sum_i s_i^2$$

bleibt. Sind alle umliegenden Dreiecksflächen gleich groß, also alle Stationen räumlich gleichmäßig verteilt, so liefert dieser Ausdruck die Anzahl der Stationen.  $N$  wurde also so gewählt, daß

$$(N+1)^2 < (\sum_i s_i)^2 / \sum_i s_i^2$$

gilt. Man erhielt meist  $N \approx 2$ .

Weitere Einzelheiten findet man bei KIRK (1977), die Methode der kleinsten Quadrate wird auch bei LINKE (1970) Bd. II, S. 172 ff. dargestellt.

#### 5.6. *Natürliche Orthogonalfunktionen zur Darstellung der horizontalen Verteilung des Geopotentials auf der Nordhalbkugel*

Bei dieser Aufgabe standen halbtägliche Gitterwerte des Geopotentials in 500 mb der Nordhalbkugel für mehrere Jahre zur Verfügung. Die naheliegenste Möglichkeit besteht darin, direkt mit den Gitterwerten zu rechnen. Die Integralgleichung (169) würde dann in eine Matrizen-eigenwertgleichung  $A \vec{g}_k = w_k^2 \vec{g}_k$  übergehen. Die Matrix  $A$  wäre auf Grund von Formel (170a) die Kovarianzmatrix von jedem Gitterpunkt  $x$  mit jedem Gitterpunkt  $y$ .

Sie ist symmetrisch, deshalb kann man auch Algorithmen angeben, um die Eigenwerte  $w_k^2$  und die Eigenvektoren  $\vec{g}_k$  zu berechnen. Dieser prinzipielle Weg ist von CRADDOCK und FLOOD (1969) eingeschlagen worden. Doch ist dies praktisch nur durchführbar, wenn die Anzahl der Gitterpunkte nicht zu groß wird, da die Anzahl der Elemente der Matrix A gleich dem Quadrat der Anzahl der Gitterpunkte ist. CRADDOCK und FLOOD (1969) mußten deshalb mit einem speziellen Verfahren die Anzahl der verwendeten Gitterpunkte für die Nordhemisphäre auf den Wert 130 reduzieren. Ein anderer Weg wurde von dem Verfasser eingeschlagen. Ihm lagen rund 2000 Gitterpunktwerte für jeden Termin vor; da diese Werte nahezu die ganze Nordhalbkugel überdeckten, lag es nahe, die Ausgangsdaten zunächst in Kugelflächenfunktionsreihen umzurechnen, die ja für die Darstellung auf Kugeloberflächen gemäß Abschnitt 3.2. besonders gut geeignet sind. Da Daten der Südhalbkugel fehlten, wurde eine zum Äquator spiegelsymmetrische Verteilung angenommen; dann treten nur Koeffizienten auf, deren Kugelflächenfunktionen spiegelsymmetrisch zum Äquator sind. Die Berechnung der Kugelflächenfunktionskoeffizienten aus den Gitterwerten erfolgte nach der Methode der kleinsten Quadrate mit einem Reihenansatz bis zur maximalen Wellenzahl 15, dabei erhält man 136 Reihenglieder. Alle räumlichen Wellen mit einer Wellenzahl  $> 15$  wurden dadurch herausgefiltert. Der Jahresgang wurde dadurch herausgefiltert und gesondert betrachtet, daß in Formel (149) für den statistischen Mittelwert  $\overline{f(x)}$  der mittlere Jahresgang genommen wurde.  $f'(x,t)$  war also die Abweichung vom mittleren Jahresgang. Der Jahresgang enthielt zeitlich nur die Wellenlängen von  $1/5$ ,  $1/4$ ,  $1/3$ ,  $1/2$ , 1 Jahr und den Gesamtmittelwert.

Da die Kugelflächenfunktionen auf der Kugeloberfläche ein orthogonales Funktionensystem bilden, liegen die Voraussetzungen der Formel (171) vor (die  $h_n(x)$ ,  $x \in$  Kugeloberfläche sind die Kugelflächenfunktionen). Der weitere Rechengang, um die natürlichen Orthogonalfunktionen  $g_k(x)$  zu erhalten, ist im Abschnitt 4 beschrieben:

Zunächst wird die Kovarianzmatrix  $A$  nach Formel (173) berechnet, dabei wird über alle zur Verfügung stehenden Termine  $t$  summiert; für den Zeitraum von 1966 bis Ende 1974 sind dies rund 6200 Termine. Dann wird das Eigenwertproblem (181) nach dem Jacobischen Verfahren, das von SPERNER (1957) und RALSTON u.a. (1967) beschrieben wurde, gelöst. Man erhält dabei die Eigenwerte  $w_k^2$ , die nach der Größe geordnet wurden, und die Eigenfunktionen  $g_k(x)$ , die gemäß Formel (174) dargestellt werden konnten. Schließlich konnte nach Formel (182) auch für jede Ordnung  $k$  der natürlichen Orthogonalfunktionen die Zeitreihen der Koeffizienten der natürlichen Orthogonalfunktionen berechnet werden, dabei haben nur diejenigen mit den niedrigsten Ordnungen eine wesentliche meteorologische Bedeutung. Weitere Einzelheiten und die Ergebnisse dieser Untersuchung findet man bei FECHNER (1978), während Vorstudien dazu, in denen nur drei Wintermonate der Jahre 1966 bis 1974 untersucht wurden, ohne gesonderte Berechnung des Jahresgangs, in den Arbeiten von FECHNER (1974), FECHNER (1975) und JECKSTRÖM (1977) dargestellt sind. Ähnliche Arbeiten findet man bei KIDSON (1975) und WHITE (1972).

#### *5.7. Vertikale natürliche Orthogonalfunktionen an einem festen geographischen Ort*

Bei dieser Problemstellung liegen Zeitreihen von meteorologischen Meßwerten an einem festen geographischen Ort vor. Die Messungen liegen jedoch in verschiedenen Druckniveaus (Höhen) und für verschiedene physikalische Parameter vor. Ziel ist es, zwei neue Datensätze zu berechnen:

1. Die zeitunabhängigen natürlichen Orthogonalfunktionen, die eine klimatologische Klassifikation der Meßwerte darstellen und nach ihrem statischen Einfluß, genau genommen nach der Größe ihrer Varianz geordnet sind,

und

2. Die nur von der Zeit und der Klassennummer, der zugehörigen natürlichen Orthogonalfunktion abhängigen Koeffizienten, die den zeitlichen Verlauf des Wetters an diesem Ort angeben, wobei man die Genauigkeit der Wettererscheinung durch Hinzunahme von Koeffizienten mit der nächst höheren Klassennummer schrittweise steigern kann. Ein einzelner Koeffizient gibt keine einzelne Wettererscheinung wieder, sondern die Stärke und Richtung derjenigen Wettererscheinungen, die in der natürlichen Orthogonalfunktion mit der gleichen Klassennummer zusammengefaßt sind.

Zwei Untersuchungen zu diesem Thema wurden hier am Institut durchgeführt. Bei der ersten wurden Reihen von Radiosondmessungen der Station Stuttgart - ersatzweise wegen Ortsverlegung der Station - Erlangen für die Jahre 1950 bis 1968 nach natürlichen Orthogonalfunktionen entwickelt. Als Meßwerte wurden das Geopotential, die Lufttemperatur, die Feuchte für verschiedene Druckniveaus von 900 mb bis 400 mb, sowie die Jahreszeit verwendet. Einzelheiten findet man bei ERDMANN (1974) und ERDMANN und FECHNER (1975).

Im Gegensatz zu dieser typischen Landstation, wurde von KAMINSKI (1977) als typische Seestation die Radiosondmessungen des Wetterschiffs C (südlich von Grönland) nach natürlichen Orthogonalfunktionen entwickelt. Dieser Untersuchung lag eine 18jährige Meßreihe von 1948 bis 1965 zugrunde. Als Meßwerte wurden in verschiedenen Druckniveaus von 1000 bis 100 mb, das Geopotential, die Lufttemperatur, die Luftfeuchte sowie der Wind verwendet.

Es wurden nur die Abweichungen vom mittleren Jahresgang betrachtet. Um die verschiedenen Meßparameter dimensionsmäßig vergleichbar zu machen, wurden sie in Größen umgerechnet, die die Dimensionen der Wurzel aus der Energie pro Masseneinheit besaßen. Die Eigenwerte hatten dann die Dimension einer Energie pro Masseneinheit. Die Windkomponenten waren bereits in der richtigen Einheit vorhanden. Temperatur und Geopotential wurden unter Verwendung der Theorie der verfügbaren potentiellen Energie,



in der die Temperaturabweichung quadratisch auftritt, umgerechnet, die Feuchte wurde unter Verwendung der Energiere relation zwischen latenter und sensibler Wärme an das System der Energiere relationen angeschlossen. In der Formel für die verfügbare potentielle Energie tritt eine Stabilitätsfunktion auf, die sich mit dem Luftdruck ändert, sonst aber als konstant angenommen wurde. Dadurch waren die Umrechnungsrelationen in den verschiedenen Druckniveaus verschieden. Diese etwas komplizierte Umrechnung geht davon aus, daß der Einfluß von physikalisch meteorologischen Größen durch die damit gekoppelte Energie gemessen und auch verglichen werden kann. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen zeigen, daß eine enge Koppelung zwischen den Meßgrößen und ihren Werten in verschiedenen Druckniveaus besteht. Mit 5 Reihengliedern kann man bereits 84 % der Gesamtvarianz darstellen, der mittlere relative Approximationsfehler liegt dann bei  $\pm 40$  % der mittleren Streuung.

Ähnliche Untersuchungen erfolgten durch NORDÖ (1966), BRADLEY u.a. (1968), MÜLLER (1968), WIIN-NIELSEN (1971) und TATARSKAYA (1974).

## 6. SPEZIELLE EIGENSCHAFTEN DER REIHENDARSTELLUNG DURCH ORTHOGONALE FUNKTIONEN

Hier sollen wesentliche Eigenschaften in nicht formal mathematischer Ausdrucksweise angegeben werden, für die alle oder gewisse Reihendarstellungen durch orthogonale Funktionen besonders gut geeignet sind:

### 6.1. Datenreduktion

Die Datenreduktion bei einem möglichst geringen Informationsverlust ist eine allgemeine Eigenschaft der Reihendarstellung durch orthogonale Funktionen, unabhängig davon, welche Funktionen verwandt werden. Dies ergibt sich aus ihrer Definition, wie sie am Anfang von Kapitel 2

beschrieben wurde. Wenn man zu einem konkreten Ergebnis kommen will, muß man jedoch ein Maß für die Information - und damit auch für den Informationsverlust - angeben. Je nach dem verwendeten Informationsmaß, ob normales mittleres Fehlerquadrat oder Varianz, hat man die mathematischen Orthogonalfunktionen oder die natürlichen zu verwenden. Vergleiche dazu die Arbeiten von HOLMSTRÖM (1963) und ELIASSEN u.a. (1969).

### *6.2. Transformation in die Spektraldarstellung*

Liegen die Daten als Funktionen der unabhängigen Variablen  $x$  vor, in der Praxis sind sie meist nur an speziellen Punkten, im allgemeinen an den Gitterpunkten, gegeben und werden sie dann in eine Reihe orthogonaler Funktionen umgerechnet, so ist diese Umrechnung eine Transformation in die Spektraldarstellung. Die Funktionen werden nicht mehr durch ihre Werte an speziellen Punkten dargestellt, sondern durch Koeffizienten, die mit bestimmten Eigenschaften - wie zum Beispiel der Wellenlänge - verbunden sind. Weitere Ausführungen zu diesem Thema erfolgten am Anfang des Abschnitts 1, also am Anfang der Einleitung. Beispiele dazu liefern: SILBERMAN (1954), KUBOTA (1958), MÜLLER (1968), BRADLEY u.a. (1968), SALTZMANN (1970), KAO u.a. (1970), KAO (1970), KAO (1970a), GAVRILIN (1972), WIIN-NIELSEN (1972), ARPE u.a. (1974) und BURROWS (1976).

### *6.3. Abgestufte vereinfachte Darstellung der Datenfelder*

Angenommen, man hat ein Feld, das sich bereits durch eine Orthogonalreihe mit einer endlichen Zahl von Gliedern darstellen läßt. Wenn einem dieses Feld zu kompliziert ist, so daß man das Wesentliche von ihm nicht erkennen kann, so läßt man das Reihenglied mit der höchsten Nummer fort. Dadurch wird das Feld einfacher, es enthält weniger Einzelheiten, das Wesentliche läßt sich leichter erkennen; denn das Wesentliche ist in den Reihengliedern mit den niedrigeren Ordnungszahlen enthalten. Ist das so entstandene Feld noch nicht einfach genug, so läßt man

ein weiteres Glied fort. Dieses Verfahren kann man so lange fortsetzen, bis die Reihe nur aus dem ersten Glied besteht. Damit hat man das Wesentlichste dieses Feldes durch genau eine Konstante, nämlich den ersten Koeffizienten  $c_1$  der Reihe dargestellt. Zwischen dieser Darstellung und der Darstellung des gegebenen Feldes sind soviele Abstufungen möglich, wie die vollständige Reihe an Reihengliedern hat. Diese Anzahl wird auch oft der Freiheitsgrad dieser Darstellung genannt. Beispiele dazu sind zu finden in den Arbeiten von AWADE u.a. (1957), HOLMSTRÖM (1963), BRADLEY u.a. (1968), ELIASSEN (1969) und GAVRIILIN (1972).

#### *6.4. Kontinuierliche Darstellung von Feldern*

Häufig soll ein Feld  $f(x)$  auf einem kontinuierlichen Definitionsgebiet gelten, man kennt seine Werte jedoch nur an gewissen diskreten Stellen, zum Beispiel an den Gitterpunkten eines Gitternetzes. Verwendet man dann eine Darstellung durch endliche Reihen von solchen Orthogonalfunktionen, die kontinuierlich und stetig, ja sogar beliebig oft differenzierbar sind, so ist das durch diese Reihe dargestellte Feld überall im Definitionsgebiet der Orthogonalfunktionen, also kontinuierlich, definiert. Außerdem besitzt das Feld die gleichen Stetigkeitseigenschaften wie die Orthogonalfunktionen. Die Beschränkung auf endliche Reihen ergibt sich zwingend aus der Tatsache, daß man höchstens soviele Reihenglieder berechnen kann, wie es Gitterpunkte gibt. In der Praxis muß man von einer endlichen Anzahl von Gitterpunkten ausgehen, dann kann die Orthogonalreihe auch nur höchstens so viele, also endlich viele Glieder haben.

Der Vorgang der Umwandlung von diskreten Feldwerten in kontinuierliche Funktionenreihen wird auch Feldanalyse genannt und leitet damit zum nächsten Unterabschnitt über. Doch zunächst noch einige Beispiele zu diesem Unterabschnitt: BRYAN (1959), BAER (1964), ELLSAESSER (1966), BAER u.a. (1971), SPETH (1974) und SIMMONDS u.a. (1975).

### 6.5. Feldanalyse aus Punktwerten

Liegt ein gewisses Feld nur an Punktwerten vor und wünscht man eine kontinuierliche Darstellung, so sind Reihen von kontinuierlichen Orthogonalfunktionen gut dafür geeignet. Alle hier in den Abschnitten 3.1. bis 3.5. verwendeten mathematischen Orthogonalfunktionen sind auf ihrem Definitionsgebiet kontinuierlich, ja sie sind dort sogar beliebig oft differenzierbar. Die Aufgabe besteht in der Berechnung der Koeffizienten  $c_i$ , wobei die Funktion nur an den Punktwerten gegeben ist. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, sollen zwei Wege zur Erreichung dieses Ziels aufgezeigt werden. Der erste Weg ist in diesem Zusammenhang der mehr direkte, tatsächlich verschiebt er jedoch meist nur die Schwierigkeiten. Danach werden die Koeffizienten  $c_k$  nach der Formel (54) berechnet, also im wesentlichen aus dem inneren Produkt der Meßwerte mit der  $k$ -ten Orthogonalfunktion. Formel (49) zeigt, daß dazu der Mittelwert - oder bis auf einen Faktor - das Integral über das Produkt aus den Funktionswerten und der Orthogonalfunktion benötigt werden. Dabei muß kontinuierlich über den vollständigen Definitionsbereich integriert werden, obwohl die Werte nur an den diskreten Gitterpunkten vorliegen. Es gilt nun, ein numerisches Integrationsverfahren anzugeben, bei dem die Werte nur an den vorgegebenen diskreten Punkten vorliegen. Kennt man ein derartiges Verfahren - z.B.

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx = \sum_i f(x_i) \, \beta_i$$

mit den  $\beta_i$  vom Ende dieses Unterabschnitts - so ist das Problem gelöst. Deshalb wurde oben gesagt, diese Methode verschiebt nur das Problem. Dennoch ist es häufig möglich, ein brauchbares Integrationsverfahren anzugeben, vor allem, wenn die Gitterwerte gleichmäßig über das Definitionsgebiet verteilt sind. Da man über den Verlauf der Funktionswerte außerhalb der Gitterpunkte zunächst nichts weiß, muß man plausible Annahmen hinzunehmen. Eine solche ist zum Beispiel, daß diskrete Felder, die an den Gitterpunkten mit den zur Verwendung

kommenden Orthogonalfunktionen übereinstimmen, auch diese Orthogonalfunktionen als Ergebnis liefern sollen. Soviel zu der direkten Analysenmethode.

Bei der zweiten Methode muß man von vornherein festlegen, wieviele Glieder der Orthogonalreihe zur Darstellung herangezogen werden sollen. Diese Anzahl muß stets kleiner oder gleich der Anzahl der Gitterpunkte sein. Dann bestimmt man in der so aufgestellten Teilreihe, die zunächst unbekannten Koeffizienten so, daß die Summe der - eventuell noch gewichteten - Fehlerquadrate an den Meßstationen ein Minimum wird. Dieses Verfahren wird die Methode der kleinsten Quadrate genannt und ist allseits bekannt. Zwei Fragen bleiben noch zu entscheiden;

1. Wieviele Glieder der Teilreihe verwendet man, und
2. welche Gewichte werden eventuell an den Stationen verwendet. Zunächst sollte man die Gewichte  $\beta_i$  so bestimmen, daß sie den Raum um den betreffenden Gitterpunkt einnehmen, der von keinem der umliegenden Gitterpunkte beansprucht wird. Für die Fläche, das gilt übrigens auch für die Kugeloberfläche, schlage ich eine Dreieckseinteilung vor, wie sie im Abschnitt 5.5. beschrieben wurde. Liegen diese Gewichte vor, so sollten die Gliederzahl der Teilreihe kleiner als der Ausdruck

$$(\sum_i \beta_i)^2 / \sum_i \beta_i^2$$

bleiben. Dabei ist über alle Gitterpunkte zu summieren. Die Begründung dafür findet man auch im Abschnitt 5.5. Weitere Beispiele zu diesem Unterabschnitt findet man in den Arbeiten von: ELLSAESSER (1966), DIXON (1969), MACHENHAUER u.a. (1972), BOURKE (1974) und SPETH (1974).

### 6.6. *Kontinuierliche Darstellung von Feldern auf der Kugeloberfläche*

Die Kugeloberfläche läßt sich bekanntlich nicht auf ein ebenes Flächenstück abwickeln, ja es gibt keine überall stetige Funktion, mit der man die vollständige Kugeloberfläche auf die Ebene abbilden kann.

Aus diesem Grunde ist die Darstellung von skalaren und vektoriellen Feldern auf der Kugeloberfläche nicht ganz unproblematisch, da man generell eine stetige Darstellung der Felder erwartet. Genau dies erreicht man mit der Darstellung durch Reihen von Kugelflächenfunktionen bzw. von orthogonalen Vektorfunktionen. Auch bei der Darstellung von horizontalen Vektorfeldern gibt es speziell an dem Nord- bzw. Südpol keine singulären Unstetigkeiten. Letztere treten immer auf, wenn die Vektorkomponenten in meridionaler und zonaler Richtung einzeln durch skalare Felder dargestellt werden sollen. Die hier angegebene Darstellung von Feldern auf der Kugeloberfläche ist nicht die einzig mögliche Art, um die Felder kontinuierlich darzustellen, so liefert jede linear unabhängige Linearkombination der Kugelflächenfunktionen einen nicht notwendig orthogonalen Funktionensatz, dessen Reihe die gleiche Eigenschaft hat. Es fehlen dann aber die anderen positiven Eigenschaften orthogonaler Funktionenreihen. Das entsprechende gilt für die orthogonalen Vektorfunktionen auf der Kugeloberfläche.

Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß die in den Kapiteln 3.1. bis 3.5. verwendeten speziellen mathematischen Orthogonalfunktionen nicht nur in ihrem ganzen Definitionsbereich stetig, sondern sogar beliebig oft differenzierbar sind. Damit hängt im wesentlichen die nächste Eigenschaft dieser Funktionen zusammen, der ein eigener Unterabschnitt gewidmet ist.

Literaturbeispiele zum Unterabschnitt 6.6.: ROBERT (1965), SCHMIDT (1969) und EFIMOV (1969).

### 6.7. Vereinfachung der Differentiation und Integration

Liegt ein Feld in Form einer Reihe der angegebenen speziellen mathematischen Orthogonalfunktionen vor, so kann man die Differentiation und die Integration auf die entsprechenden Operationen an den Orthogonalfunktionen zurückführen. Diese Operationen sind dort stets definiert und leicht und analytisch ausführbar:

$$\text{z.B. } \frac{d}{dx} e^{inx} = in e^{inx}$$

das heißt, der ursprüngliche Koeffizient ist nur mit einem imaginären Faktor zu multiplizieren. Bei der Differentiation der Kugelflächenfunktion erhält man ebenfalls einen Faktor und den Übergang zu einer orthogonalen Vektorfunktion. Für die Differentiation der orthogonalen Vektorfunktion erhält man ein analoges Ergebnis. Bei der Integration tritt an die Stelle der Multiplikation die Division. Damit sind diese infinitesimalen Operationen auf die einfacheren Operationen der Multiplikation und Division der spektralen Komponenten zurückgeführt. Während die Integration immer durchführbar ist, kann es bei der Differentiation von unendlichen Reihen dadurch Schwierigkeiten geben, daß die neu entstandene Reihe nicht konvergiert und die dadurch entstandene Funktion nicht mehr zu den zugelassenen Funktionen des Hilbertraums gehört. Dies hat jedoch nur eine theoretische Bedeutung, da man es in der Praxis immer mit endlichen Reihen zu tun hat. Dadurch wird die Differenzierbarkeit a priori vorausgesetzt.

Den Vorteilen bei der Differentiation und Integration stehen Nachteile bei der Multiplikation und Division der Funktionenreihen gegenüber. Zwar gibt es auch hierfür analytische Formeln, doch erstens sind diese im allgemeinen komplizierter und rechenintensiver als die Multiplikationen und Divisionen von Feldern in Gitterpunktdarstellung und zweitens vergrößert sich bei jeder Multiplikation von zwei Teilreihen die Anzahl der Glieder der neu entstandenen Produktreihe so, daß ihre maximale

Wellenzahl gleich der Summe der maximalen Wellenzahlen der Teilreihen ist. Im allgemeinen müssen die neu hinzutretenden Glieder weggelassen, also abgehackt werden. Das ist der sogenannte nicht-lineare Effekt, bei dem Information verloren geht. Dieser Informationsverlust läßt sich auch bei der Gitterpunktdarstellung nicht vermeiden, er schlägt sich dort in der Unsicherheit bei der Differentiation und Integration nieder. Bei dem Rechnen mit den Koeffizienten orthogonaler Funktionenreihen weiß man jedoch genau, welche Vernachlässigungen man beim Abhacken macht. Beim Rechnen in der Gitterpunktdarstellung sind die analogen Fehler schwerer zu übersehen und schwerer zu deuten. Bei der Addition und Subtraktion gibt es zwischen der Gitterpunktdarstellung und der spektralen Darstellung keine wesentlichen Unterschiede. Weitere Informationen zu diesem Thema findet man in dem Unterabschnitt 6.10. "Die Verwendung orthogonaler Reihendarstellungen in numerischen Modellen". Beispiele dazu sind die Arbeiten von KUBOTA (1958), BAER (1964), RASMUSSEN (1974), ORSZAG (1974), PURANI u.a. (1974), SIMMONDS u.a. (1975) und JAMES (1976).

#### *6.8. Objektive Klassifikation gewisser Typen von Datenfeldern*

Oft liegt die Aufgabe vor, eine Grundgesamtheit von empirisch gegebenen Feldern zu klassifizieren, ohne daß man genau weiß oder ohne daß angegeben wird, nach welchen Gesichtspunkten die Klasseneinteilung vorgenommen werden soll. Für diese Aufgabe bieten sich die natürlichen Orthogonalfunktionen geradezu an. Die Funktionen selbst stellen die Klasseneinteilung dar. Genau genommen, kann man bei reellen Koeffizienten für jede Funktion, also für jedes damit verbundene Merkmal, eine lineare Klasseneinteilung vornehmen, unabhängig von der Einteilung der nachfolgenden Funktion. Dabei nimmt die Bedeutung mit wachsender Ordnung der Orthogonalfunktion ab. Da die Koeffizienten positive und negative Werte annehmen können, gibt es zu jedem Merkmal auch sein Gegenteil. Die ein-



fachste Einteilung in zwei Klassen ist also  $c_1 > 0$  und  $c_1 < 0$ . Dem entspricht: das wichtigste Merkmal ist da - oder sein Gegenteil. Besser ist eine Einteilung in drei Klassen z.B.  $c_1 > +1$ ,  $-1 \leq c_1 \leq 1$ ,  $c_1 < -1$ , also: wichtigstes Merkmal vorhanden, wichtigstes Merkmal fehlt, Gegenteil des wichtigsten Merkmals ist vorhanden. Will man nur extreme Fälle herausgreifen, so setzt man die Grenzen  $\pm 1$  weiter nach außen. Eine entsprechende Klassifikation mit Hilfe von  $c_2$  stellen Unterklassen zu  $c_1$  dar. Ist z.B.  $c_1$  ein Maß für Warmluft (negative Werte von  $c_1$  bedeuten dann Kaltluft), so kann  $c_2$  ein Maß dafür sein, ob es sich um feuchte Luft handelt. Für eine anschauliche Darstellung, um welche Eigenschaften es sich jeweils handelt, ist es zweckmäßig, ein synthetisches Feld zu konstruieren, in dem nur der zu untersuchende Koeffizient mit einem extremen positiven oder einem extremen negativen Wert z.B.  $\pm 2$  auftritt und alle anderen Koeffizienten verschwinden. Um das Originalfeld  $f(x,t)$  zu erhalten, ist dabei gemäß Formel (149) noch außer dem  $\pm 2$ -fachen der entsprechenden natürlichen Orthogonalfunktion  $g_k(x)$  der zeitliche Mittelwert  $\overline{f(x)}$  hinzuzuzusaddieren. Für die horizontalen natürlichen Orthogonalfunktionen hat JECKSTRÖM (1977) eine derartige Klasseneinteilung beschrieben und sie dann auch meteorologisch interpretiert.

In den Arbeiten von ERDMANN (1974) und ERDMANN und FECHNER (1974) und von KAMINSKI (1977) sind entsprechende Klasseneinteilungen mit Hilfe der vertikalen natürlichen Orthogonalfunktionen über einer geographischen Station vorgenommen worden. Einige weitere Literaturbeispiele sind die Arbeiten von GRUZA (1965), NORDÖ (1966), JOELSSON (1970) und WIIN-NIELSEN (1971).

### 6.9. Statistische Interpolation, Extrapolation und Vorhersage

Die rein zeitabhängigen Koeffizienten  $a_i(t)$  der natürlichen Orthogonalfunktionen sind gemäß Formel (152) zeitlich orthogonal, also unkorreliert. Die Zeitreihe jedes einzelnen Koeffizienten kann daher unabhängig von den übrigen betrachtet werden. Insbesondere kann man fehlende Zwischenwerte interpolieren und am Ende einer solchen Reihe auch extrapolieren, also vorhersagen. Nach welcher Methode die einzelne Zeitreihe interpoliert oder extrapoliert wird, soll zunächst nicht erörtert werden. Da man mit Hilfe der interpolierten (oder extrapolierten) Koeffizienten nach Formel (149) das Feld dieses Termins zusammensetzen kann, ist mit diesem Verfahren die Interpolation, bzw. Vorhersage von Datenfeldern auf die Interpolation bzw. Vorhersage von Zeitreihen zurückgeführt. Letzteres ist gewiß einfacher. Auf Einzelheiten der Interpolation der Zeitreihen soll hier nicht eingegangen werden, weil dies Problem nicht unmittelbar mit den natürlichen oder anderen Orthogonalfunktionen zusammenhängt. Doch manchmal ist das gesuchte Feld  $f(x, t_0)$  zur Zeit  $t_0$  teilweise bekannt, z.B. nur auf einem echten Teil  $\tau \subset \mathcal{G}$  des Definitionsgebiets  $\mathcal{G}$ , während es auf dem übrigen Teil des Definitionsgebiets unbekannt ist. Dazu ein Beispiel:  $f(x, t)$  sei die Temperatur in der Höhe  $x$  über einer Meßstation. Die natürlichen Orthogonalfunktionen für  $0 \leq x \leq X$  seien aufgrund einer langen Meßreihe bekannt. Manchmal finden jedoch nur Messungen bis zu einer geringeren (etwa der halben) Höhe  $Y$  statt mit dem Wert  $f(x, t_0)$  und  $0 \leq x \leq Y$ .

Man möchte nun gern schätzen können, wie der Temperaturverlauf zur Zeit  $t_0$  für  $Y < x \leq X$  ist, also in dem räumlichen Bereich, in dem nicht gemessen wurde. Der Definitionsbereich  $\mathcal{G}$  ist hier  $\mathcal{G} = [0, X]$ , während  $\tau$  das Intervall  $[0, Y]$  ist. Gesucht wird der Wert  $f(x, t_0)$  für  $x \in (Y, X]$ . Zunächst definiert man eine neue Teilortho-

gonalfunktion, die nur auf  $\tau$  nicht verschwinden

$$G_k(x) = \begin{cases} g_k(x) & \text{für } x \in \tau \\ 0 & \text{für } x \in \mathcal{G} \text{ und } x \notin \tau \end{cases} \quad (185)$$

Nun berechnet man aus dem bekannten Teil  $f'(x, t_0)$  des Feldes und diesen Teilorthogonalfunktionen Näherungen für die Koeffizienten  $c_k(t_0)$  Näherungskoeffizienten

$$c_k(t_0) = \frac{(f'(t_0), G_k)}{w_k^2} \quad (186)$$

Diese Formel ist analog zur Formel (153) für die  $c_k(t)$  gebildet. Das innere Produkt  $(f'(t_0), G_k)$  hängt jedoch nur von den Werten  $f'(t_0, x)$  mit  $x \in \tau$  ab, die nach der Voraussetzung bekannt sind, denn nach seiner Definition (144) erhält man

$$\begin{aligned} (f'(t_0), G_k) &= \frac{1}{m(\mathcal{G})} \int_{\mathcal{G}} f'(x, t_0) \cdot G_k^*(x) \, dx \\ &= \frac{1}{m(\mathcal{G})} \int_{\tau} f'(x, t_0) \cdot G_k^*(x) \, dx, \end{aligned}$$

letzteres, weil der Integrand wegen (185) für  $x \notin \tau$ ,  $x \in \mathcal{G}$  verschwindet. Die gesuchte Näherungsfunktion  $F(x, t_0)$  für  $f(x, t_0)$  mit  $x \in \mathcal{G}$  wird nun durch die Reihe

$$F(x, t_0) = \overline{f(x)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t_0) g_k(x) \quad (187)$$

gegeben, darin sind die  $g_k(x)$ , die ursprünglichen Orthogonalfunktionen, die auf dem ganzen Definitionsgebiet bekannt sind. Diese Art der statistischen Interpolation ist optimal.

GANDIN (1965) hat sich ausführlich mit dieser optimalen Interpolation vor allem für die Anwendung in der Meteorologie befaßt. Andere Literatur zu dem Thema dieses Unterabschnitts findet man bei HOLMSTRÖM (1970), VOGLER (1973) und KNUDSEN (1973).

#### *6.10. Die Verwendung orthogonaler Reihendarstellungen in numerischen Modellen*

Ein wesentliches Anwendungsgebiet für die spektrale Darstellung von Feldern sind numerische Modelle. Für die auf endlichen Gebieten definierten Funktionen können im allgemeinen nur die räumlichen Abhängigkeiten der Felder durch Reihen von Orthogonalfunktionen dargestellt werden, nicht jedoch die zeitlichen Abhängigkeiten. Letztere müssen weiterhin durch Punktwerte auf der Zeitachse dargestellt werden. Das hängt damit zusammen, daß die Zeitachse nach beiden Seiten unendlich ausgedehnt ist und die in dieser Arbeit betrachteten Definitionsgebiete der Orthogonalfunktionen unendlich ausgedehnte Gebiete ausschließen. Somit käme eine Anwendung der Reihendarstellung für die Zeitvariable nur bei solchen Modellen infrage, die z.B. den allgemeinen Tagesgang oder den allgemeinen Jahresgang darstellen sollen.

Für die räumlichen Definitionsgebiete ist die Bedingung der Endlichkeit praktisch immer erfüllt - in der Vertikalen muß dann der Luftdruck als Koordinate gewählt werden -. Die Darstellung durch Reihen mathematischer Orthogonalfunktionen in Modellen vereinfacht die Operationen von Differentiation und Integration; für die Kugeloberfläche kommt hinzu, daß die entsprechenden Funktionen von sich aus auf der ganzen Kugeloberfläche eindeutig und stetig sind, dabei kann man auch leicht eine Auflösung erreichen, die für jeden Punkt der Kugeloberfläche gleich ist. Bei der Darstellung auf Gitterpunkten ist dies nur in den singulären Fällen möglich, falls man als Gitterpunkte die Ecken eines regulären Körpers nimmt. Der entstehende Gitterpunktsabstand ist für praktische Rechnungen zu groß. Außerdem verursachen die Fehler, die bei der Differentiation in der Gitterpunktsdarstellung entstehen, leicht eine mathematische Instabilität des Modells, die durch eine räumlich ungleichförmige Auflösung verstärkt wird. Sie muß durch eine höhere zeitliche Auflösung kompensiert werden.

Einen besonders großen Zeitschritt kann man in räumlich begrenzten Modellen durch Verwendung von natürlichen Orthogonalfunktionen erreichen wie KARHILA (1974) gezeigt hat.

Die Literatur über Anwendung orthogonaler Reihen in numerischen Modellen ist sehr umfangreich.

Ein spezielles internationales Symposium befaßte sich vom 12. bis 16. August 1974 mit diesem Thema (GARP Report 1974). Weitere Informationen findet man dort und in den folgenden Literaturangaben: BRYAN (1959), ROBERT (1965), BÖTTCHER (1966), BAER (1968), ROBERT (1968), BAER (1970), BODIN (1972), NIESEN (1973), RASMUSSEN (1974), MASHKORICH u.a. (1974), PURANI u.a. (1974), HOSKIN u.a. (1975), MOURA (1970).

## 7. ZUSAMMENFASSUNG DER ERGEBNISSE

Für ein von zwei Parametern  $x$  und  $t$  abhängiges Feld  $f(x,t)$  ist für viele Zwecke die Darstellung durch eine Funktionenreihe

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \cdot g_k(x)$$

der Darstellung durch Gitterpunktwerte vorzuziehen, vor allem, weil bei der Verwendung von kontinuierlichen Funktionen  $g_k(x)$  das Feld  $f(x,t)$  bei der Darstellung durch die Funktionenreihe selbst dann noch für alle Punkte  $x$  des Definitionsbereichs  $\mathcal{V}$  definiert ist, wenn man nur endlich viele Reihenglieder berücksichtigt. In dieser Arbeit werden außerdem nur orthogonale Funktionen verwendet, das bedeutet für das innere Produkt von zwei Funktionen:

$$(g_k, g_j) = \frac{1}{m(\mathcal{V})} \int_{\mathcal{V}} g_k(x) \cdot g_j^*(x) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq j \\ > 0 & \text{für } k = j \end{cases}$$

Es werden nur endliche Definitionsgebiete  $\mathcal{V}$  betrachtet. Der Parameter  $t$  ist im allgemeinen die Zeit, es kann aber auch ein anderer Parameter, insbesondere ein statistischer Parameter sein. Die Felder  $f(x,t)$  müssen lediglich quadratisch Lebesgue-integrabel sein:

$$||f(t)||^2 = (f(t), f(t)) = \frac{1}{m(\mathcal{V})} \int_{\mathcal{V}} f(x,t) \cdot f^*(x,t) dx < +\infty$$

das bedeutet im allgemeinen Anwendungsfall, daß die mittlere Gesamtenergie endlich bleiben muß. Weitere Einschränkungen sind für  $f(x,t)$  nicht erforderlich.

Ein wesentliches Ziel bei der Anwendung orthogonaler Reihen, besteht in der schrittweisen Annäherung des Feldes  $f(x,t)$  durch die Teilreihe

$$f_K(x,t) = \sum_{k=1}^K c_k(t) g_k(x)$$

Der dabei gemachte Fehler

$$v_K(t) = ||f(t) - f_K(t)|| = \sqrt{\sum_{k=K+1}^{\infty} |c_k(t)|^2 ||g_k||^2}$$

nimmt mit wachsendem  $K$  ab und strebt für  $K \rightarrow +\infty$  gegen Null.

Die Auswahl und Anordnung der Orthogonalfunktionen  $g_k(x)$  kann man durch die Angabe eines einzigen selbstadjungierten Operators  $A$  festlegen, der Felder in Felder transformiert. Die  $g_k(x)$  sind die Eigenfunktionen von  $A$ , die nach der Größe der Eigenwerte  $w_k^2$  geordnet werden (es werden nur Operatoren mit nicht negativen Eigenwerten betrachtet):

$$A g_k = w_k^2 g_k$$

Die Auswahl des Operators hängt davon ab, was man als möglichst einfaches Feld definiert, das entspricht den Orthogonalfunktionen mit kleinen Werten von  $k$ . Hier werden zwei Fälle unterschieden:

1. Die Felder sollen nach ihren Stetigkeitseigenschaften angeordnet werden: Je kleiner  $k$  desto größer die Stetigkeit, das heißt, desto kleiner ist die Norm des relativen

Differentialquotienten

$$w_k = ||d g_k/dx||/||g_k||.$$

Die  $g_k$  sind nach wachsenden Eigenwerten  $w_k^2$  geordnet.

$g_0(x)$  ist die glatteste Funktion. Die  $g_k(x)$  sind mathematische Orthogonalfunktionen, die von dem Definitionsgebiet  $\mathfrak{D}$  der Felder (und der Orthogonalfunktionen) abhängen.

2. Man kann die Orthogonalfunktionen so wählen, daß der statistische Mittelwert des Fehlers:

$$v_k = \sqrt{\frac{1}{v_k^2}}$$

jeweils ein Minimum wird für  $k = 1, 2, 3, \dots$

Für den Operator A ist in diesem Fall die Kovarianzfunktion der Felder zu nehmen:

$$A g_k(x) = (g_k, \overline{f'}) f'(x) = w_k^2 g_k(x)$$

darin ist  $f'(x, t)$  die Abweichung vom statistischen Mittelwert  $\overline{f'(x, t)} = f(x, t) - \overline{f(x)}$ . Die Eigenfunktionen  $g_k(x)$  hängen von den Feldwerten statistisch ab und heißen deshalb natürliche (empirische) Orthogonalfunktionen. Sie werden nach fallenden Eigenwerten  $w_k^2$  geordnet.  $g_1(x)$  ist die im statistischen Sinne wahrscheinlichste Funktion für  $f'(x, t)$ .

Die unter 1. aufgeführten mathematischen Orthogonalfunktionen hängen von dem vorgegebenen Definitionsgebiet  $\mathfrak{D}$  und eventuell dem Wertebereich  $\mathfrak{W}$  ab.

Ist  $\mathfrak{D}$  eine geschlossene Kurve, also  $-\pi \leq x \leq \pi$  mit  $f(-\pi) = f(+\pi)$ , so gilt

$$A = - \frac{d}{dx} ,$$

$$g_m(x) = e^{imx} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

die Eigenwerte sind  $w_m^2 = m^2$ .

$f(x)$  wird durch eine komplexe Fourierreihe dargestellt.

Im reellen Fall nimmt man stattdessen als Eigenfunktionen

$$g_0 = 1 \text{ für } m = 0 \text{ und}$$

$$g_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos mx, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin mx \quad m = 1, 2, \dots$$

Ist  $\mathcal{S}$  die Kugeloberfläche mit den geographischen Koordinaten  $\phi$  und  $\lambda$ , so ist der Differentialquotient eines Skalars  $f(\phi, \lambda)$  ein zweidimensionaler Vektor  $\vec{v}(\phi, \lambda)$  und umgekehrt.

Für skalare Felder erhält man den Eigenwertoperator durch Minimierung von  $||\text{grad } f|| = ||\text{rot } f||$ . Es ist der negative Laplaceoperator auf der Kugeloberfläche:

$$A = - \text{div grad} = - \nabla_h^2$$

Als Eigenfunktionen erhält man die Kugelflächenfunktionen:

$$g_{n,m}(\phi, \lambda) = Y_n^m(\phi, \lambda) = P_n^m(\sin \phi) e^{im\lambda}$$

die  $P_n^m(z)$  sind die auf eins normierten zugeordneten Legendreschen Funktionen:

$$P_n^m(z) = \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} (-1)^m \sqrt{1-z^2}^m \frac{d^n}{dz^n} P_n(z).$$

Die Eigenwerte hängen nur von  $n$  ab  $w_{n,m}^2 = n(n+1)$ ,  $n=0,1,2,\dots$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n$ .

Für vektorielle Felder  $\vec{v}$  hat man  $\sqrt{||\text{div } \vec{v}||^2 + ||\text{rot}_R \vec{v}||^2}$  zu minimieren, um den entsprechenden vektoriellen Eigenwertoperator zu erhalten:

$$A = - \text{grad div} + \text{rot rot}_R.$$

Dies ist der negative vektorielle Pseudo-Laplaceoperator auf der Kugeloberfläche. Seine Eigenfunktionen sind die orthogonalen Vektorfunktionen

$$g_n^{m,s}(\phi, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \begin{cases} \text{grad } Y_n^m(\phi, \lambda) & \text{für } s=0 \\ \text{rot } Y_n^m(\phi, \lambda) & \text{für } s=1 \end{cases}$$

Die Eigenwerte  $n(n+1)$  hängen wieder nur von  $n$  ab, doch fehlt der Eigenwert 0, es gilt  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n$ ;  $s = 0, 1$ .

Ist  $\mathcal{S}$  die Strecke von  $-1$  bis  $+1$ , also  $-1 \leq x \leq +1$ , so



hat man

$$\left| \left| \sqrt{1-x^2} \frac{df}{dx} \right| \right|$$

zu minimieren und erhält als Eigenwertoperator

$$A = - \frac{d}{dx} \{ (1-x^2) \frac{d}{dx} \}$$

mit den Legendre'schen Polynomen  $P_n(x) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{ (x^2-1)^n \}$  als Eigenfunktionen und den Eigenwerten  $w_n^2 = n(n+1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Ist  $\mathcal{D}$  eine ebene Rechteckfläche,  $-X \leq x \leq X$ ,  $-Y \leq y \leq Y$ , so hat man den Ausdruck

$$\left| \left| \left( \sqrt{X^2-x^2}/X \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{i} + \left( \sqrt{Y^2-y^2}/Y \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{j} \right| \right|$$

zu minimieren und erhält den Eigenwertoperator

$$A = - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{X^2-x^2}{X^2} \frac{\partial}{\partial x} \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{Y^2-y^2}{Y^2} \frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

mit den doppelten Legendre'schen Polynomen

$$g_{n,m}(x,y) = P_n\left(\frac{x}{X}\right) \cdot P_m\left(\frac{y}{Y}\right)$$

als Eigenfunktionen und den Eigenwerten

$$w_{nm}^2 = \frac{n(n+1)}{X^2} + \frac{m(m+1)}{Y^2}, \quad \begin{matrix} n = m = 0 \\ n = 1, 2, 3, \dots \\ m = 1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

Die doppelten Legendre'schen Polynome wurden zur Analyse und zur Darstellung von Bodenwerten des Luftdrucks, der Temperatur und der Windkomponenten für das Gebiet der Kieler Bucht verwendet. Die Analysen wurden nach der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt unter Verwendung von Stationsgewichten, die der Größe der durch sie repräsentierten Umgebung entsprachen.

Die Kugelflächenfunktionen wurden gemeinsam mit den natürlichen Orthogonalfunktionen zur Darstellung des Geopotentials der 500 mb Fläche der Nordhalbkugel verwendet.

Die natürlichen Orthogonalfunktionen der Abweichungen von dem Jahresgang wurden dabei durch die Kugelflächenfunktionskoeffizienten dargestellt. Diese Untersuchung dient einer objektiven klimatischen Klassifikation der Zirkulation der Nordhalbkugel im Wellenzahlenbereich.

Der Wertebereich der natürlichen Orthogonalfunktionen kann auch aus unterschiedlichen physikalischen Parametern wie Luftdruck, Temperatur, Feuchte und Windkomponenten bestehen. Es ist jedoch zweckmäßig, alle diese Größen in eine gemeinsame physikalische Dimension umzurechnen, die möglichst der Wurzel aus der Energie proportional sein sollte. Entsprechende Rechnungen wurden für langjährige Reihen von Radiosondenaufstiegen einer Station durchgeführt. Es handelt sich um das Wetterschiff C; eine etwas ältere Arbeit befaßt sich mit einer Landstation, mit Stuttgart bzw. vorher Erlangen. Der Ortsparameter  $x$  stellte bei diesen Untersuchungen den Luftdruck als vertikale Koordinate dar und spezifizierte außerdem den betreffenden physikalisch-meteorologischen Parameter. Bereits mit wenigen Reihengliedern (5 bis 7) ließ sich eine gute Darstellung der Aufstiege erzielen.

Reihen orthogonaler Funktionen sind gut geeignet, um empirische Daten bei möglichst geringem Informationsverlust zu reduzieren, sie ermöglichen eine stufenweise Vereinfachung der Datenfelder, und sie bringen für Modellrechnungen eine Reihe von Vorzügen mit.

Reihen mathematischer Orthogonalfunktionen ermöglichen eine kontinuierliche Darstellung von Feldern; sie sind deshalb bei der Feldanalyse aus Punktwerten hilfreich und vereinfachen die Differentiation und Integration. Skalar- und Vektorfelder lassen sich mit den Kugelflächenfunktionen bzw. ihren Ableitungen auf der vollständigen Kugeloberfläche stetig, ja sogar beliebig oft differenzierbar darstellen. Dabei kann man es so einrichten, daß die Auflösung, also die kleinstmögliche Entfernung zwischen zwei Extremwerten, an allen Punkten der Kugeloberfläche exakt gleich groß ist.

Die natürlichen Orthogonalfunktionen stellen eine optimale und objektive Klassifikation der Grundgesamtheit der untersuchten Felder dar. Die rein zeitabhängigen Koeffizienten der natürlichen Orthogonalfunktionen ermöglichen eine statistische Interpolation, Extrapolation und Vorhersage der Felder  $f(x,t)$ .

# TABELLE DER VERWENDETEN SYMBOLE

A	Operator in $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{H}^2$ mit nicht negativen Eigenwerten Element des Raumes $\mathcal{M} = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{M} = \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2$ manchmal auch die entsprechende Matrix
$a_{xy}$	Elemente der Matrix A
a	Eigenwert des Operators A oder D oder B
$\mathcal{L}$	$\mathcal{L} = \mathcal{H}, \mathcal{H}^2$ , Definitionsgebiet eines Operators
B	stetiger Integraloperator, $B \in \mathcal{M}$
$b_n(t)$	Koeffizient der Orthonormalfunktion $h_n(x)$ in der Entwicklung von $f'(x,t)$ , Durch $\{b_1(t), b_2(t), \dots\}$ erhält man eine Darstellung von $f'(x,t)$ im Hilbertschen Folgenraum $\mathcal{H}_F$
$\mathcal{L}$	Menge der komplexen Zahlen, Menge der (im allgemeinen zeitabhängigen) Koeffizienten der Orthogonalfunktionen
$c_k$	$\approx c_k$ , jedoch ist bei der Berechnung die Orthogonalfunktion $g_k(x)$ durch $G_k(x)$ angenähert worden
$c_k$	Koeffizient der k-ten Orthogonalfunktion, $c_k$
$c_k(t)$	Koeffizient der k-ten Orthogonalfunktion für die Zeit t
$\mathcal{G}$	Indexmenge der Vektoren, bzw. Definitionsbereich der Felder und der Orthogonalfunktionen
D	Differentialoperator zweiter Ordnung, sein Definitionsbereich $\mathcal{L}$ umfaßt nicht ganz $\mathcal{H}$ , $D \in \mathcal{M}$
$F(x,t)$	$\hat{\approx} f(x,t)$ , Näherungslösung für $f(x,t)$ bei optimaler Interpolation
$f(x,t)$ $f(x)$ $f$	$\left. \begin{array}{l} f(x,t) \\ f(x) \\ f \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{skalares Feld, der darzustellenden Meßwerte, als Funktion} \\ \text{der Ortsvariablen x und manchmal auch der statistischen} \\ \text{oder Zeitvariablen t. Ihre Menge bildet den Raum } \mathcal{H}: \{f\} = \mathcal{H} \end{array} \right.$
$f_K(x)$	K-te Näherungsfunktion für $f(x)$ , Orthogonalreihe für K Gliedern
$f'(x,t)$	Abweichung von $f(x,t)$ von seinem statistischen Mittelwert $f'(x,t) = f(x,t) - \overline{f(x)}$

$G_k(x)$	$= g_k(x)$ für $x \in T$ sonst 0
$g_k$	$\in \mathcal{H}$
$g'_k$	$\in \mathcal{H}_F$
$\vec{g}_k$	$\in \mathcal{H}^2$
$\mathcal{H}$	Menge der skalarwertigen
$\mathcal{H}^2$	Menge der vektorwertigen
$\mathcal{H}_F$	Hilbertscher Folgenraum, in dem die Meßwertefelder durch (im allgemeinen unendliche) Folgen dargestellt werden. Er ist isomorph zu $\mathcal{H}$ .
$h(x)$	beliebige Funktion aus $\mathcal{H}$
$\vec{i}$	orthogonaler Einsvektor in x-Richtung, falls $\mathcal{V}$ eine Fläche darstellt $(x,y) \in \mathcal{V}$
$i$	$= \sqrt{-1}$ , imaginäre Einheit
$\vec{j}$	orthogonaler Einsvektor in y-Richtung, falls $\mathcal{V}$ eine Fläche darstellt $(x,y) \in \mathcal{V}$
$J_m(z)$	m-te Besselfunktion
$K$	$\in \mathcal{N}$ , maximaler Index der Teilreihe, in Abschnitt 5.3, auch Bodenreibungskonstante
$k$	$\in \mathcal{N}$ , Laufindex der Glieder der Orthogonalreihe
$K(x,y)$	$= f'(x) f'(y)^*$ , Kern des Integraloperators B, Kovarianz- funktion von $f'(x,t)$
$\mathcal{M}$	$= \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ , Menge der linearen Transformationen von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}$
$M$	ein maximaler Index der Orthogonalreihe, maximale zonale Wellenzahl
$m$	ein Laufindex für die Glieder der Orthogonalreihe, zonale Wellenzahl
$m(\mathcal{V})$	Maß von $\mathcal{V}$ , $= \int_{\mathcal{V}} dx$ . $\frac{1}{m(\mathcal{V})} \int_{\mathcal{V}} f(x) dx$ ist der Mittelwert von $f(x)$ über $\mathcal{V}$ .
$\mathcal{N}$	Menge der natürlichen Zahlen für die Numerierung der Reihenglieder

$N$	ein maximaler Index der Orthogonalreihe, maximale Wellenzahl
$n$	ein Laufindex für die Glieder der Orthogonalreihe, Wellenzahl
$P_n^m(z)$	normierte zugeordnete Legendre'sche Funktion, $\frac{1}{2} \int_{-1}^1  P_n^m(z) ^2 dz = 1$
$P_n(z)$	$= P_n^0(z)$ , normiertes Legendre'sches Polynom
$p$	Vektorkomponente von $\vec{g}$ in x-bzw. $\lambda$ -Richtung, in Abschnitt 5.4., der Luftdruck
$q$	Vektorkomponente von $\vec{g}$ in y-bzw. $\phi$ -Richtung
$\mathcal{R}$	Menge der nicht-negativen reellen Zahlen für die Eigenwerte, für die Abstände verschiedener Felder voneinander und für die Längen der Vektoren bzw. Felder im Hilbertraum
$r$	Korrelationskoeffizient
$s$	Index zur Unterscheidung von Reihengliedern mit divergenten von rotationellen Vektorfeldern
$T$	Anzahl der t-Werte im Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ , Anzahl der betrachteten Termine
$t_1$	erster Termin
$t_2$	letzter Termin
$t$	statistische Variable (Zeitvariable)
$u$	Vektorkomponente von $\vec{v}$ in x- bzw. $\lambda$ -Richtung
$\vec{v}(x)$ $\vec{v}$	$\left. \begin{array}{l} \text{vektorwertiges Feld, der darzustellenden Meßwerte} \\ \text{als Funktion der Ortsvariablen } x \end{array} \right\} \in \mathcal{H}^2$
$v_K^2$	$\in \mathcal{R}$ , mittleres Fehlerquadrat bei der Approximation durch eine Orthogonalreihe mit K Gliedern
$v$	Vektorkomponente von $\vec{v}$ in y-bzw. $\phi$ -Richtung
$w$	Wertevorrat der Felder $f(x, t)$
$W$	wesentlicher Parameter bei der Berechnung der Eigenvektoren der natürlichen Orthogonalfunktionen $= (a_{11} - a_{22}) / (w_1^2 - w_2^2)$

$w_k^2$	$\in \mathcal{R}$ , k-ter Eigenwert des Operators A, D oder B
$w^2$	$\in \mathcal{R}$ , Eigenwert des Operators A, D oder B
X	Maximalwert von x (in Abschnitt 6.9. gilt $x \in \mathcal{G}$ für $x \in \tau$ . $\tau = [0, X] \subset \mathcal{G}$ )
x	$\in \mathcal{G}$ , Ortsvariable oder Komponente der Ortsvariablen $(x, y) \in \mathcal{G}$
$y_n^{m,s}(\phi, \lambda)$	orthogonale Vektorfunktion, $(\phi, \lambda) \in \mathcal{G}$ , $(n, m, s) \in \mathcal{N}$ , $y_n^{m,s} \in \mathcal{H}^2$
$y_n^m(\phi, \lambda)$	$= P_n^m(\sin \phi) \cdot e^{im\lambda}$ , Kugelflächenfunktion, $(\phi, \lambda) \in \mathcal{G}$ , $(n, m) \in \mathcal{N}$ , $y_n^m \in \mathcal{H}$
y	Maximalwert von y in $\mathcal{G} = \{(x, y) \mid  x  \leq X,  y  \leq Y\}$
y	$\in \mathcal{G}$ , Ortsvariable oder Komponente der Ortsvariablen $(x, y) \in \mathcal{G}$
z	Variable, meist $= \sin \phi$
$\alpha_n$	Phase der n-ten Einzelwelle
$\beta_i$	Gewicht des i-ten Gitterpunkts, ein Maß für die umgekehrte Gitterpunktsdichte. $\sum_i \beta_i = m(\mathcal{G})$ , $\sum_i f(x_i) \beta_i \approx \int_{\mathcal{G}} f(x) dx$
$\left. \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{matrix} \right\}$	$= \pm 1$
$\varepsilon$	beliebig kleine positive Zahl
$\lambda$	geographische Länge $(\phi, \lambda) \in \mathcal{G}$
$\phi$	geographische Breite $(\phi, \lambda) \in \mathcal{G}$
$\theta$	"Drehwinkel" der Eigenvektoren
$\tau$	$\subset \mathcal{G}$ Teilgebiet, auf dem das Feld $f(x, t_0)$ bekannt ist, $x \in \tau$
$\operatorname{div} \vec{v}$	$= \Delta_h \cdot \vec{v}$ , Divergenzoperator auf einer Fläche
$\operatorname{divgrad} f$	$= \Delta_k^2 f$ , Laplaceoperator auf einer Fläche
$\operatorname{grad} h$	$= \Delta_h h$ , Gradientoperator auf einer Fläche
$\operatorname{Re}\{c\}$	Realteil von c
$\operatorname{rot}_R \vec{v}$	$= (\nabla \times \vec{v})_3$ , Vorticityoperator = Vertikalkomponente des Rotationsoperators
$\operatorname{rot} h$	$= \nabla \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$ , Rotationsoperator, angewandt auf die dritte Komponente, liefert einen horizontalen Vektor

$(f, g)$	Inneres oder skalaras Produkt von $f(x)$ und $g(x)$ in $\mathcal{H}$ , bzw. $\mathcal{H}^2$ , hat im allgemeinen einen komplexen Wert
$\ f\ $	$= \sqrt{(f, f)}$ , Norm in $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{H}^2$
$\bar{c}$	$= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} c(t) dt$ , Mittelwert von $c(t)$ über das Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$ für $T = [t_1, t_2] \rightarrow +\infty$
$c^*$	konjugiert-komplexer Wert von $c$
$g'(x)$	$= \frac{dg(x)}{dx}$ , Ableitung nach $x$ , nur in Abschnitt 3
$g''(x)$	$= \frac{d^2 g(x)}{dx^2}$ , zweite Ableitung nach $x$ , nur in Abschnitt 3



## LITERATURVERZEICHNIS

- Aardoom, L., 1969: Some transformation properties for the coefficients in a spherical harmonic expansion of the earth external gravitational potential, *Tellus* 4, S. 572-584
- Abramowitz, M. und J.A. Stegun, 1965: *Handbook of Mathematical Functions*, New York
- Arpe, K. und Fr. Defant, 1974: Die Quellen und Senken und die vertikalen und meridionalen Flüsse der turbulenten kinetischen Energie in der Tropo- und unteren Stratosphäre am 12. Dezember 1957 im Wellenzahlenbereich, *Festschrift für H. Flohn, Bonner Met. Abhandlungen* Nr. 17, S. 63-92
- Awade, S.T., G.C. Asnani, and R.N. Keshavamurty, 1975: Spherical Harmonic Analysis of the Normal Constant Pressure Charts in the Northern Hemisphere, *Arch. Met. Geoph. Biokl., Ser. A*, 24, S. 189-205
- Baer, F. und G.W. Platzman, 1961: A procedure for numerical integration of the spectral vorticity equation, *J. Meteorology* 3, S. 393-401
- Baer, F., 1964: Integration with the Spectral Vorticity Equation, *J. of the Atm. Sciences* 3, S. 260-276
- Baer, F., 1968: Studies in low-order spectral systems, Colorado State University, *Atmospheric Science Paper* 129, S. 1-77
- Baer, F., 1970: Spectral models: a Summary, Publication in Meteorology, Proceedings of the (eighth) Stanstead Seminar Montreal, Nr. 97, S. 37-40
- Baer, F. and F.N. Alea, 1971: Effects of Spectral Truncation on General Circulation and Long-Range Prediction, *Journal of the Atm. Sciences* 4, S. 457-480
- Barnett, T.P. und R.E. Davis, 1975: Eigenvector analysis and prediction on sea surface temperature fluctuations in the Northern Pacific ocean, *Proceed. of the WMO/JAMAP Symposium on long-term climatic fluctuations* WMO Nr. 421, S. 439-450

- Barry, R.G. und A.H. Perry, 1973: Synoptic Climatology  
Methods and Applications,  
Buch Methuen & Co. Ltd, 11 New Fetter  
Lane London EC4, 555 S.
- Bates, J.R., 1970: Dynamics of disturbances on the  
Intertropical Convergence Zone,  
Quart. J. R. Met. Soc. 410, S. 677-701
- Bodin, S., 1972: A quasi-geostrophic 3-parameter  
numerical prediction model in empirical  
orthogonal functions,  
Sveriges Meteorologiska och Hydrologiska  
Institut preliminär rapport Serie  
Meteorologie Nr, 33
- Böttcher, J., 1966: Kugelfunktionen als Grundlage für ein  
Atmosphärenmodell,  
Met. Abh. Bd. LXIII Heft 12
- Bourke, W., 1974: A Multi-Level Spectral Model.  
I. Formulation and Hemispheric Integrations,  
Monthly Weather Review, 102, S. 687-701
- Boyd, J.P., 1976: The Noninteraction of Waves with the  
Zonally Averaged Flow on a Spherical Earth  
and the Interrelationships of Eddy Fluxes  
of Energy, Heat and Momentum,  
Journal of the Atm. Sci. Vol. 33, 12
- Bradley, J. und A. Wiin-Nielsen, 1968: On the transient part  
of the atmospheric planetary waves,  
Tellus 20, S. 533-544
- Brink, D.M. and G.R. Satchler, 1968: Angular Momentum.
- Bryan, K., 1959: A Numerical Investigation of Certain  
Features of the General Circulation,  
Tellus XI, 2, S. 163-174
- Burrows, W.R., 1976: A Diagnostic Study of Atmospheric Spectral  
Kinetic Energetics,  
Journal of the Atm. Sci. Vol. 33, 12
- Cooley, J.W. und J.W. Tukey, 1965: An algorithm for the machine  
calculation of complex Fourier series,  
Math. of Computation, S. 297-301
- Craddock, J.M. und C.R. Flood, 1969: Eigenvectors for representing  
the 500 mb geopotential surface over the  
Northern Hemisphere,  
Quart. J. R. Met. Soc. 95, Nr. 405,  
S. 576-593

- Deland, R., 1968: On the vertical structure of travelling planetary-scale waves, Proc. of the Stanstead Sem., Canada, S. 47-54
- Deland, R.J., 1972: On the spectral Analysis of Traveling Waves, J. Met. Soc. of Japan, 2, S. 104-109
- Dixon, R., 1969: Orthogonal polynomials as a basis for objektive analysis, Met. Office Sci. Paper, 30
- Edmonds, A.R., 1957: Angular Momentum in Quantum Mechanics
- Efimov, V.A., 1969: Eine spektrale Form der Gleichungen der Dynamik der Atmosphäre für das System verallgemeinerter sphärischer Funktionen, Meteorologija i Gidrologija, 8, 15-29
- Eliassen, E., B. Machenhauer und E. Rasmussen, 1970: On a numerical method for integration of the hydrodynamical equations with a spectral representation of horizontal fields, Inst. f. theoret. Met, Kopenhagen, Report Nr. 2
- Eliassen, E. und B. Machenhauer, 1965: A study of the fluctuations of the atmospheric planetary flow patterns represented by spherical harmonics, Tellus XVII, 2, S. 220-238
- Eliassen, E. und B. Machenhauer, 1969: On the observed large-scale atmospheric wave motion, Tellus 21, 2, S. 149-166
- Ellsaesser, H.W., 1966: Evaluation of Spectral Versus Grid Methods of Hemispheric Numerical Weather Prediction, J. of Applied Meteorology, 5, S. 246
- Ellsaesser, H.W., 1966: Expansion of Hemispheric Meteorological Data in Antisymmetric Surface Spherical Harmonic (Laplace) Series, J. of Applied Met., Vol. 5, S. 263-276
- Erdmann, H., 1974: Die Entwicklung vertikaler natürlicher Orthogonalfunktionen aus einer Serie von Radiosondendaten der Stationen Erlangen/Stuttgart unter Berücksichtigung des Jahresganges und die meteorologische Interpretation der wichtigsten Funktionen, Dipl.-Arb., Math.-Nat. Fak., Univ. Kiel

- Erdmann, H. und H. Fechner, 1975: Die vertikalen natürlichen Orthogonalfunktionen einer 19jährigen Reihe von halbtägigen Radiosondendaten der Station Erlangen/Stuttgart, Meteorol. Rdsch. 28, S. 110-121
- Fechner, H., 1973: Orthogonale Vektorfunktionen zur stetigen Darstellung von meteorologischen Feldern auf der Kugeloberfläche, Ber. IfM, Kiel, Nr. 1
- Fechner, H., 1974: Empirical Orthogonal Functions in the Horizontal Plane based on Spherical Harmonics, GARP Report No. 7, S. 310-323
- Fechner, H., 1975: Darstellung des Geopotentials der 500 mb-Fläche der winterlichen Nordhalbkugel durch natürliche Orthogonalfunktionen, Ber. IfM, Kiel, Nr. 5
- Fechner, H., 1978: Klimatologie des Geopotentials der 500 mb-Fläche der Nordhalbkugel unter Verwendung von natürlichen Orthogonalfunktionen im Wellenzahlenbereich, in Vorbereitung
- Fischer, G., 1972: Weitere Ergebnisse zum Haushalt der spektralen kinetischen Energie im numerischen Modell, Vortrag SPAAZ-Seminar 16.-18. Mai 1972
- Gandin, L.S., 1965: Objective Analysis of Meteorological fields, Jerusalem, 242 Seiten
- GARP-Report, 1964: The GARP-Programme on numerical experimentation, Report of the international symposium on spectral methods in numerical weather prediction, Copenhagen, 12.-16. August, Report Nr. 7, 503 S
- Gavrilin, Mirabel und Monin, 1972: The energy spectrum of synoptic processes, Izvestiya, Atmospheric and Ocean Physics, 5, S. 275-280
- Gruza, G.V., 1965: On the Statistical Characteristics of the general Circulation of the Atmosphere, Dynamics of the large-scale atmospheric processes
- Holmström, I., 1963: On a method for parametric representation on the state of the atmosphere, Tellus 15, S. 127-149

- Holmström, I., 1970: Analysis of time series by means of empirical orthogonal functions, Tellus 6, S. 638-647
- Hoskins, B.J. and A.J. Simmons, 1975: A multi-layer spectral model and the semi-implicit method, Quart. J. R. Met. Soc., 101, S. 637-655
- James, R.W., 1976: New tensor spherical harmonics for application to the partial differential equations of mathematical physics, Phil. Transactions of the Royal Society of London 1302, S. 195-221
- Jeckström, W., 1977: Meteorologische Interpretation der wichtigsten Koeffizienten der natürlichen Orthogonalfunktionen der winterlichen 500 mb-Fläche der Nordhalbkugel an Hand von synoptischen Großwetterlagen, Ber. IfM, Kiel Nr. 36
- Joelsson, R., 1970: Applicering av empiriska orthogonala funktioner på en synoptisk Vädersonsättning, Sveriges Meteorologiska och Hydrologiska Institut, Serie Meteorologi, Notiser och preliminära rapporter Stockholm Nr. 23
- Kaminski, U., 1977: Klassifikation der Wetterlagen über dem Ozeanwetterschiff C durch vertikale natürliche Orthogonalfunktionen, Ber. IfM, Kiel, Nr. 35
- Kao, S.-K., C.J. Tsay, L.L. Wendell, 1970: The meridional transport of angular momentum in wavenumber-frequency space, J. Atmosph. Sci. Nr. 4, S. 614-626
- Kao, S., 1970: Wavenumber-frequency spectra of temperature in the free atmosphere, J. Atmosph. Sci. 7, S. 1000-1007
- Kao, S., 1970: The kinetic energy of large-scale atmospheric motion in wavenumber-frequency space Mid-troposphere of the Southern hemisphere, J. Atmosph. Sci. 7, S. 1008-1020
- Kidson, J.W., 1975: Eigenvector Analysis of Monthly Mean Surface Data, Monthly Weather Rev. 103, S. 177-186
- Kirk, E., 1977: Objektive Analysen meteorologischer Parameter über der Kieler Bucht, Ber. IfM, Kiel, Nr. 37

- Knudsen, J.H., 1973: Approximate Analytical Solutions to the Non-Divergent Barotropic Vorticity Equation in Spectral Form, Geophysica Norwegica, 1, S. 1-13
- Kubota, S., 1959: Surface Spherical Harmonic Representations of the System of Equations for Analysis, Papers in Tokyo Meteor. and Geophys., 3-4, S. 145-166
- Lange, H.-J., 1976: Anwendung eines baroklinen, adiabatischen Modells der Atmosphäre zur Untersuchung der spektralen Energetik mit Hilfe der numerischen Filteranalyse, Dissertation des Fachbereichs 24 der F.U. Berlin
- Lense, J., 1954: Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik, Leipzig
- Linke, F. und F. Baur, 1970: Meteorologisches Taschenbuch Bd. II, Leipzig
- Loon, H.van und R.L. Jenne, K. Labitzke, 1973: Zonal Harmonic Standing Waves, J. of Geophys. Res, 21, S. 4463-4471
- Lorenz, E.N., 1959: Empirical Orthogonal Functions and Statistical Weather Prediction, Final Report Statistical Forecasting Projekt, Mass. Inst. of Technology Dep. of Meteorology, Anhang I, S. 29-78
- Machenhauer, B. und E. Rasmussen, 1972: On the integration of the spectral hydrodynamik equations by a transform method, Report Nr. 3 of the Inst. f. teoretisk Met. Kopenhagen, S. 1-44
- Magnus, W. F. Oberhettinger und R. Soni, 1966: Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York
- Magnus, W. und F. Oberhettinger, 1966: Kugelfunktionen, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathemat. Physik, S. 68
- Mashkorich, S.A., I.G. Veil, 1974: Investigations of Large-Scale Atmospheric Processes Based on Non-Linear Spectral Model, Vortrag Copenhagen

- Moura, A.D., 1970: The Eigensolutions of the Linearized Balance Equation over a Sphere, J. of Atm. Sc. 6, S. 877-907
- Müller, C., 1966: Spherical Harmonics, Lecture Notes in Mathematics, Nr. 17 Springer-Verlag
- Müller, E., 1968: Einige aeroklimatologische Bemerkungen, Met. Rdsch., 1. Heft, S. 6-15
- Niesen, W., 1973: Über Spektralmodelle in der numerischen Simulation der globalen atmosphärischen Zirkulation, Dipl.-Arb. im Fachbereich Geowissenschaften der F.U. Berlin
- Nitta, T., 1970: On the Role of Transient Eddies in the Tropical Troposphere, J. Met. Soc. Japan, 4, S. 348-359
- Nordö, J., 1966: The Vertical Structure of the Atmosphere, Geophysica Norvegica, 5
- Orszag, S.A., 1970: Transform Method for the Calculation of Vector-Coupled Sums: Application to the Spectral Form of the Vorticity Equation, J. Atm. Sci. 6, S. 890-895
- Orszag, S.A., 1974: Fourier Series on Spheres, Monthly Weather Rev., Vol. 102,
- Paulin, G., 1968: Diagnostic omega equation in the fourier spectral domain, Proc. of the Stanstead Sem., Canada, S. 9-40
- Pflugbeil, C., 1967: Hemisphärische und globale Luftdruckbilanzen, Ber. d. Deutschen Wetterdienstes Bd. 14, Nr. 104, 1-21
- Platzman, G.W., 1960: The spectral form of the vorticity equation, J. of Meteorology, 6, S. 635-644
- Prey, A., 1922: Darstellung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde, Abhand. königlicher Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Physikkl. 11(1), S. 29
- Puri, K. and W. Bourke, 1974: Implications of Horizontal Resolution in Spectral Model Integrations, Monthly Weather Rev., 5

- Ralston, A. und L.S. Wilf, 1967: Mathematische Methoden für Digitalrechner (Bd. 1), S. 152-168, München, Wien
- Rao, A.G. und B.V. Rao, 1971: Harmonic Analysis of mean surface temperature of the northern hemisphere, Indian J. Met. Geophys. 4, S. 575-580
- Rasmussen, E., 1974: An investigation of the truncation errors in a barotropic primitive equation model on spectral form, Inst. f. teoretisk Met. Kopenhagen, Report Nr. 5
- Rinne, J., 1973: Horizontal empirical orthogonal functions as used in the representation of atmospheric pattern and waves, Third conference on Probability and Statistics in Atmospheric Science, American Met. Society, Boulder, Colo. S. 181-186
- Rinne, J. und V. Karhila, 1975: A spectral barotropic model in horizontal empirical orthogonal functions, Quart. J. R. Met. Soc. 101, S. 365-382
- Robert, A., 1965: The Behaviour of Planetary Waves in an Atmospheric Model based on Spherical Harmonics, Scientific Report No. 1, United States Air Force Nr. 77
- Robert, A., 1968: Precipitation in spectral models of the atmosphere, Proc. of the Stanstead Sem., Canada, S. 91-113
- Robert, A., 1970: Forecast Experiments with a spectral model, Publication in Meteorology, Montreal, Nr. 97, S. 69-82
- Rochas, M., 1973: Fonctions spheriques Applications a la Meteorologie, La Météorologie, Journal de mécanique et de Physique de l'Atmosphère, S. 59-84
- Rose, M.E., 1957: Elementary Theory of Angular Momentum
- Saltzman, B., 1970: Large-scale atmospheric energetics in the wavenumber domain, Rev. Geophys. Space Phys. 2, S. 289-302



- Silberman, I., 1954: Planetary waves in the Atmosphere,  
J. of Meteorology, Bd. 11, 1, S. 27-34
- Simmonds, I., 1973: Spectral Representation of Horizontal  
Wind in Numerical Models of the Atmosphere,  
J. of Applied Met., Vol. 13, 2
- Simmons A.J. and B.J. Hoskins, 1975: A comparison of spectral  
and finite-difference simulations of a  
growing baroclinic wave,  
Quart. J. R. Met. Soc., 101, S. 551-565
- Smirnow, W.J., 1962a: Lehrgang der höheren Mathematik Teil V,  
Kapitel I. Das Stieltjessche Integral und  
II. Mengenfunktionen und das  
Lebesguesche Integral,  
Berlin
- Smirnow, W.J., 1962b: Lehrgang der höheren Mathematik Teil V,  
Kapitel IV: Metrische und normierte Räume  
und  
V: Der Hilbertsche Raum,  
Berlin
- Soong, S.-T. und C. Kung, 1969: Short-Period Kinetic Energy Cycles  
in the Atmosphere,  
J. of Applied Met., 4, S. 484-491
- Sperner, E., 1957: Die Eigenwerte einer reellen symmetrischen  
Matrix, Hauptachsentransformation,  
Einführung in die Analytische Geometrie  
und Algebra 2. Teil, Göttingen, S. 133-150
- Speth, P., 1974: Die Anwendung von orthogonalen Vektorfunk-  
tionen auf die Analyse meteorologischer  
Felder,  
Meteorol. Rdsch. 27, S. 53-61
- Speth, P., 1974: Energetische Vergleichszahlen für Modell-  
rechnungen der allgemeinen atmosphärischen  
Zirkulation,  
Meteorol. Rdsch. 27, S. 33-53
- Schmidt, F., 1969: Entwurf eines Modells zur allgemeinen Zir-  
kulation der Atmosphäre und zur Klima-  
togenese,  
Dissertation, Met. Inst. der Univ. Bonn
- Schmidt, F., 1971: Entwurf eines Modells zur allgemeinen Zir-  
kulation der Atmosphäre und Simulation  
klimatologischer Strukturen,  
Bonner Met. Abhandlungen Heft 16
- Stegun, I.A., 1965: Orthogonal Polynomials,  
Handbook of Mathematical Functions, S. 773

- Stegun, I.A., : Legendre Funktionen,  
Handbook of Mathematical Functions,  
S. 331
- Stidd, C.K., 1967: The use of eigenvectors for climatic  
estimates,  
J. Appl. Met. 6, S. 255
- Tatarskaya, M.S., 1974: Orthogonal expansions of the temperature  
and humidity fields of the lower  
troposphere,  
Izv. Atmospheric and Ocean Physics 10, 3,  
S. 290-296
- Tricomi, F.G., 1955: Vorlesungen über Orthogonalreihen,  
Berlin/Göttingen/Heidelberg
- Vogler, P., 1973: Über die Verwendung natürlicher orthogonaler  
Funktionen zur Auswahl analoger Feldverteilungen,  
Abhandlungen des Met. Dienstes der DDR,  
S. 147-158
- Wallace, J.M., 1971: Spectral Studies of Tropospheric Waves  
Disturbances in the Tropical Pacific,  
Rev. of Geophysics and Space Physics 9,  
3, S. 557-612
- Weare, B.C., A.R. Navato und R.E. Newell, 1975:  
Empirical orthogonal analysis of Pacific  
sea surface temperature,  
Proceed. of the WMO/JAMAP Symposium on  
long-term climatic fluctuations WMO  
Nr. 421, S. 167-182
- White, E.J., 1972: Orthogonalised regressions of height  
increments on meteorological variables,  
Research Papers in Forest, S. 109-125
- Wiin-Nielsen, A., 1971: A simplified theory of the annual  
variation of the general circulation,  
Geophysica 11, 2, S. 165-184
- Wiin-Nielsen, A., 1971: On the motion of various vertical  
modes of transient, very long waves,  
II. The Spherical Case,  
Tellus 23, 3, S. 207-217
- Wiin-Nielsen, A., 1972: A Study of Power Laws in the Atmospheric  
Kinetic Energy Spektrum using Spherical  
Harmonic Funktionen,  
Meteorologiske Annaler, Oslo, Nr. 5, Bd. 6